الأساليب الكمية
في
مجال الإدارة

دكتور
محمد توفيق ماضي

دار المعارف

تقديـــــم

إن الدور الرئيسى الذى يلعبه المدير في منظمات الأعمال ، هو دور متخذ القرار ، وسوف نعرض فى هذا الكتاب لبعض الأساليب الكمية Quantitative Methods التى تستخدم فى اتخاذ القرارات فى بعض المجالات المختلفة فى ميدان إدارة الأعمال .

وتنطوى الأساليب الكمية على محاولة الوصول إلى حل أمثل من خلال استخدام بعض النماذج الرياضية فى حل المشاكل الإدارية ، وقد بدأ استخدام هذه الأساليب خلال الحرب العالمية الثانية . فقد ظهرت الحاجة إلى استخدام فروع العلم المختلفة فى معالجة بعض المشاكل العسكرية بهدف الوصول إلى حلول واضحة وعملية ، وقد سميت المجموعات المسئولة عن ذلك فى الجيش بمجموعات بحوث العمليات Operations Research ثم ذاع بعد ذلك استخدام هذه الأساليب فى مجال الصناعة . ويرجع الانتشار الكبير الآن لهذه الأســـاليب إلى ظهور وانتشـار الآلات الحاسبة والحاسب الآلى Computer سواء فى ميـــدان البحـــوث أو الممارســات ، فتوجد الآن البرامج Software Packages التى تغطى تقريباً كل الأساليب الكمية، والتى بدونها كان استخدام بعض هذه الأساليب أمراً بالغ الصعوبة ، بل محالاً فى أحيان كثيرة .

وعلى الرغم من تعدد الأساليب الكمية فى مجال الأعمال ، فقد قصرنا هذا الكتاب على أكثر الأساليب شيوعاً ، حيث يبدأ هذا الكتاب بعرض لأسلوب البرمجة الخطية الذى يختص بكيفية الوصول إلى التخصيص الأمثل للموارد المحدودة على الاستخدامات المختلفة فى ظل أنواع مختلفة من

القيود . ويستخدم هذا الأسلوب بشكل واسع فى تحديد توليفة الانتاج ، وتخطيط العمالة ، وتحديد البدائل المثلى للاستثمار ، وحل مشكلة تخطيط الانتاج سواء كان ذلك فى حالة تعظيم الربح أو تدنية التكاليف . ثم يأتى بعد ذلك الفصل الثانى ليعالج بالتفصيل مشكلة النقل والتوزيع . فعلى الرغم من أن هذه المشكلة تعد حالة خاصة من حالات البرمجة الخطية يمكن معالجتها اعتماداً على أسلوب البرمجة الخطية التقليدى إلا أنه هناك بعض الأساليب الخاصة التى تم ايجادها لتعالج تلك الحالة الخاصة بحل مشاكل شبكات التوزيع بشكل منطقى ومنظم . ثم يأتى بعد ذلك الفصل الثالث ليتضمن نظرية اتخاذ القرارات فى ظل حالتى الخطر وعدم التأكد اعتماداً على نظرية الاحتمالات ومفهوم القيمة المتوقعة .

أما الفصلين الرابع والخامس فيتضمنان عملية جدولة انجاز المشروعات باستخدام أسلوب المسار الحرج والذى يستخدم بكثرة فى قطاع الانشاءات والتشييد سواء كان ذلك فى حالة التحليل التقريرى المؤكد CPM أو فى ظل التقديرات الاحتمالية لوقت انجاز الأنشطة والمشروع المعروف بأسلوب PERT .

وقد اختتمنا الكتاب بفصل عن نظرية صفوف الانتظار والتى تعالج حالات الوصول للوصول إلى خدمة فى ظل ظروف تشغيل مختلفة .

أسأل الله أن يجد الدارس والقارئ نفعاً وتمهيداً جيداً لمزيد من المعرفة فى هذا المجال .

الفصل الأول

البرمجة الخطية

* طبيعة مشكلة البرمجة الخطية
* التطور التاريخي لأسلوب البرمجة الخطية
* مفاهيم أساسية
* صياغة المشكلة رياضيا
* الفروض الأساسية لأسلوب البرمجة الخطية
* استخدام أسلوب الرسم البياني في الحل (تعظيم الربح)
* استخدام أسلوب الرسم البياني في الحل (تدنية التكاليف)
* أسلوب السمبلكس
* استخدام أسلوب السمبلكس في الحل (تعظيم الربح)
* استخدام أسلوب السمبلكس في الحل (تدنية التكاليف)
* أسعار الظل
* حالات أخري لأسلوب السمبلكس
* مشاكل فنية عند استخدام السلوب السمبلكس
* تحليل الحساسية
* الثنائية (الوجه الآخر لمشكلة البرمجة الخطية)

البـــــرمجــــــة الخطيـــــة

Linear Programming

يستخدم أسلوب البرمجة الخطية في حل مشاكل التوزيع الأمثل للموارد المحدودة علي الاستخدامات المختلفة . ويعد هذا الأسلوب الرياضي من أكثر الأساليب الكمية Quantitative Methods انتشارا سواء في الدراسات الأكاديمية أو الممارسات العملية . وقد ثبت استخدامه في معالجة غالبية المشاكل التي يتعرض لها مدير الإنتاج والعمليات . ومن أمثلة هذه المشاكل :

١ - توزيع الموارد الانتاجية (المادة الخام ، الآلات ، العمالة ... ، الخ) علي منتجات مختلفة ، بهدف تحديد توليفة المنتجات المثلي Production mix التي تحدد الكمية الواجب إنتاجها من كل سلعة .

٢ ـ عمل خطة اجمالية يتم فيها توزيع أنواع مختلفة من الطاقة (الطاقة الأصلية ، الإضافية ، لدي الغير) علي الطلب المتوقع في فترات التخطيط القادمة .

٣ ـ عمل خطة توزيع مثلي يتم فيها تحديد كميات الإنتاج أو المادة الخام الواجب نقلها من المصادر المختلفة إلي جهات الاستخدام المتعددة وهوما يعرف بمشاكل النقل Transportation problems

٤ ـ تخصيص الموارد المختلفة (الأفراد ، الآلات ، ... الخ) علي أنواع

مختلفة من الأعمال Jobs وذلك في حالة اختلاف قدرة تلك الموارد علي أداء هذه الأعمال المختلفة .

ويجب أن نوضح هنا أن هذه هي مجرد أمثلة علي استخدام هذا الأسلوب في مجال الإنتاج ، وذلك لا يعني بأي حال من الأحوال قصر استخدام البرمجة الخطية علي هذا المجال ، فهناك الاستخدامات العديدة في مجالات التسويق والتمويل والأفراد .

طبيعة مشكلة البرمجة الخطية :

توضح الفقرة السابقة أن المشكلة التي يتم حلها باستخدام أسلوب البرمجة الخطية لها ثلاثة جوانب أساسية :

١ ـ التوزيع الأمثل .

٢ ـ الموارد المحدودة .

٣ ـ الاستخدامات المختلفة .

وسوف نوضح كل منها بايجاز فيما يلي :

١ ـ التوزيع الأمثل :

إن توزيع الموارد المتاحة لا يجب أن يتم بشكل عشوائي . فمن المؤكد أن هناك تكلفة معينة للحصول علي هذه الموارد كما أن هناك عائدا (يطق عليه الربح) متوقعا من تشغيل هذه الموارد ، فإذا كان المشروع يحدد أسعار بيع المنتجات ، وبالتالي هامش الربح ، فإن هدفه يجب أن يكون هو تعظيم الربح أو العائد الناتج من توزيع تلك

الموارد علي الاستخدامات المختلفة . أما إذا كان المشروع لا يحدد أسعار البيع ، كما هو الحال بالنسبة لبعض منشآت القطاع العام ، فإن هدفه يجب أن يكون هو تقليل تكاليف الانتاج إلي أقل حـد ممكن . ويتم ترجمه هذا الهدف في حالة استخدام أسلوب البرمجة الخطية (سواء تعظيم ربح أو تقليل تكاليف) إلي ما يعرف بدالة الهدف Objective function.

ويضمن أسلوب البرمجة الخطية من خلال خطوات رياضية معينة الوصول إلي أفضل البدائل ا لذي يضمن المستـوي الأمـثل Optimum لدالة الهدف . ففي حالة تعظيم الربح سوف يضمن البديل المختار تعظيم الربح Profit maximization إلي أقصي حد ممكن ، وفي حالة تقليل التكاليف سوف يضمن البديل المختار تدنية التكاليف Cost minimization إلي أقل حد ممكن.

٢ ـ الموارد المتاحة :

إن محدودية الموارد من الحقائق التي يتعامل معها بشكل دائم متخذي القرار . وتهدف كل المنظمات إلي تحقيق أهدافها التشغيلية في حدود مواردها المتاحة . وقد تكون هذه الموارد أموال أو مادة خام أو أفراد أو آلات أو ساعات تشغيل . كما أنها قد تكون قدرة السوق علي استيعاب السلعة أو القدرات التكنولوجية للمنشأة . وتجمع كل هذه الأنواع من الموارد خاصية المحدودية Limited . ويقصد بها وجود حدا أقصي من الكميات المتاحة من هذا المورد خلال فترة زمنية معينة . فهناك الميزانية المالية التي تحكم كمية الأموال المتاحة ، وحصص

التموين وحصص الاستيراد التي تحكم كمية المادة الخام . كما أن هناك الآلات الحالية والتي تحكم القدرة الانتاجية لكثير من المنشآت .

ويضمن نموذج Model البرمجة الخطية إدخال أثر هذه الموارد المتاحة في الحسبان عند صياغة المشكلة بإضافة ما يسمي بالقيود Constraints . فالقيود هي مجموعة المحددات التي لا يستطيع متخذي القرار التحكم فيها ولكنه يحاول الوصول إلي أفضل قرار في ظلها .

٣ ـ الاستخدامات المختلفة :

إن جوهر مشكلة البرمجة الخطية هو أن هناك بدائل للاستخدامات . فإذا كان لدي المنشأة كمية من الأخشاب فأمامها الخيار في استخدامها في انتاج الكراسي أو في إنتاج الترابيزات (المناضد) . وإذا كان لدي الشركة بترول خام فأمامها الخيار في انتاج بنزين أو كيروسين أو بنزين طائرات أو كميات مختلفة من كل منهم . أما في حالة عدم وجود بدائل للاستخدامات فلا يمكن Infeasibility استخدام أسلوب البرمجة الخطية .ولحسن الحظ فإن البدائل دائما تكون عديدة أمام متخذ القرار.وتكون المشكلة الأساسية هي الاختيار من بينها .

التطور التاريخي لأسلوب البرمجة الخطية :

قدم جورج دانتزج George Dantzig في عام ١٩٤٧ ما عرف بأسولب السمبلكسSimplex الذي يستخدم في حل المشكلة العامة

للبرمجة الخطية . وقد اعتمد دانتزج علي أن كل من دالة الهدف والقيود المستخدمة يمكن وضعها في شكل علاقات خطية Linear ، وبالتالي يمكن استخدام قواعد جبر المصفوفات Linear algebra في حل تلك المجموعة من المعادلات معا مع مراعاة أن يكون الحل النهائي هو أفضل الحلول بناء علي دالة الهدف . ولحسن الحظ فهناك أسلوب أبسط يستخدم في إيضاح ماهية المشكلة وكيفية حلها وهو أسلوب الرسم البيـاني Graphical method ولكن يعاب عليه أنه لا يستخدم إلا في حالة وجود استخدامين فقط (سلعتين) .

وعلي الرغم من التعقيد الرياضي الذي يتصف به إثبات واشتقاق أسلوب السمبلكس ، إلا أن خطوات الحل Algorithm سلسة ومحددة خصوصا في حالة المشاكل الصغيرة . وقد ساعد وجود الكومبيوتر في العصر الحديث علي نمو استخدام هذا الأسلوب في مجالات وتطبيقات عديدة جديدة كان يصعب استخدام هذا الأسلوب في حلها يدويا .

ويهمنا أن نشير هنا إلي وجود مشاكل معينة أن هناك بعض مشاكل الانتاج والتي تعتبر حالة خاصة من حالات مشاكل البرمجة الخطية . وعلي الرغم من إمكانية حـل هذه المشاكل باستخدام الأسـلوب البياني أو أسـلوب السمبلكس إلا أنه نظـرا للطبيعـة الخاصة لهذه المشكلة فقد ظهرت أساليب أسهل لمعالجتها ، ومثال ذلك أسـلوب النقل Transportation method أسلوب التخصيص Assign-ment method

وسوف نتناول في الأجزاء التالية أسلوب البرمجة الخطية عن طريق استخدام مثالا بسيطا وضع خصيصا لايضاح الخصائص الأساسية لعملية صياغة المشكلة وحلها باستخدام كل من الأسلوب البياني وأسلوب السمبلكس .

مثال (١ ـ ١) انتاج سلعتين :

دعنا نفترض أن إحدي شركات الأثاث قد قررت دخول ميدان الأثاثات المكتبية والتي يتم تصنيعها من الخشب . وكان أمامها أما إنتاج المكاتب أو المقاعد أو كليهما . والمشكلة التي تواجهها هي اختيار مزيج من المنتجات يحقق لها أقصي أرباحا ممكنة ـ وقد قامت الشركة بعمل مجموعة عمل مكونة من رجال البيع والإنتاج وقاموا بوضع الصورة أمام الإدارة العليا علي النحو التالي :

	مكتب	مقعد
ربح الوحدة (بالجنيه)	١٠	٩
كمية الأخشاب اللازمة (ألواح)	٥	٤
ساعات العمل اللازمة للوحدة في الورشة	٢	٤

وقد اتضح أن إجمالي كمية الخشب المتاحة أسبوعيا للمصنع هي ١٢٠ لوح وأن الورشة يمكنها أن تعمل فقط ٦٠ ساعة في الأسبوع . وأن الشركة يمكنها بيع كل الوحدات المنتجة من المكاتب والمقاعد .

والمطلوب الأن هو تحديد الكميات الواجب انتاجها من كل سلعة وذلك في حدود كمية الأخشاب وساعات العمل المتاحة أسبوعيا ، وذلك بشكل يضمن تعظيم Maximize إجمالي الربح المحقق إلي أقصي حد ممكن .

مفاهيم أساسية :

قبل وضع صياغة رياضية لهذه المشكلة يمكننا الآن أن نوضح معني الاصطلاحات التي سوف نستخدمها :

١ ـ المطلوب الآن هو تحديد قيمة لعدد الوحدات من المكاتب وعدد الوحدات من المقاعد . ويمكن تسمية هذه بالمتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها Decision variables ، أي أن المطلوب هو تحديد قيمة لكل من :

س$_{١}$ = عدد الوحدات الواجب انتاجها من المكاتب = ؟

س$_{٢}$ = عدد الوحدات الواجب انتاجها من المقاعد = ؟

٢ ـ هناك موارد محدود (وهي في هذا المثال المادة الخام والطاقة) تمثل نوعا من القيود Constraints علي متخذي القرار. فمن غير الممكن استخدام أكثر من ١٢٠ لوحا من الخشب في الأسبوع أو تشغيل الورشة أكثر من ٦٠ ساعة اسبوعياً. وهذه القيود يفترض أنها نتيجة لدراسة مستقلة بذاتها ولكنها بالنسبة لمتخذ القرار في هذا الموقف تمثل معطيات given لا يتم التحكم فيها . وفي الحياة العملية ممكن أن يزداد عدد هذه القيود بشكل كبير .

فتستخدم المنشآت مئات الأصناف من المادة الخام ويمر المنتج علي العديد من الأقسام. كذلك فمن الممكن أن تكون هناك عدة قيود من نوع آخر مرتبطة بالسوق أو بالإمكانيات المالية أو الخصائص الفنية للمنتج .

٣ ـ من المفترض في مشكلة البرمجة الخطية أن مساهمة Con-tribution كل وحدة من المنتجات المختلفة المقترحة مختلفة عن بعضها البعض ، ففي مثالنا هذا يبلغ ربح الوحدة ١٠ ، ٩ للمكتب والمقعد علي التوالي . ويترتب علي ذلك أن اختلاف توليفة الانتاج سوف يترتب عليها اختلاف في رقم الربح المحقق . والمطلوب هو الوصول إلي التوليفة التي تعظم الربح . ويطلق علي الصياغة الرياضية التي تمثل إجمالي الربح المحقق دالة الهدف Objective function .

وجدير بالذكر أن الهدف قد يكون تقليل التكاليف إلي أقل حد ممكن . وفي هذه الحالة نحتاج إلي معرفة تكلفة إنتاج الوحدة من كل سلعة بدلا من رقم الربح للوحدة . وهذه هي الحالة الأكثر شيوعا بالنسبة للمنشآت التي لا تسعي إلي تحقيق أرباح أو المنشآت التي لا تتحكم في سعر بيع السلعة . ومثال ذلك بعض السلع التي يتم تحديد أسعارها بواسطة الجهات الحكومية في منشآت القطاع العام .

٤ ـ تمثل الطبيعة الفنية للعملية الانتاجية نوعا من القيود يرتبط بالكم اللازمة من كل مورد لانتاج وحدة من السلعة . ففي مثالنا هذا توصل قسم التصميم والمقايسات إلي أن المكتب يحتاج خمسة ألواح من الخشب كما أن تشغيله في الورشة يحتاج إلي ٢ ساعة عمل . ومن المفترض أيضا أن هذه التقديرات تتم بناء علي دراسات مسبقة تهدف إلي الوصول إلي أقصي وفر ممكن للمادة الخام وساعات العمل أما بالنسبة لمتخذ القرار فهي تمثل معطيات.

٥ ـ يمكن أن نشير هنا إلي أن تغير أى من تلك المعطيات الموضحة في الخطوات السابقة سوف يترتب عليه تغيير الحل الأمثل فالحل الأمثل يكون صحيحا فقط في حدود هذه الأرقام ـ أما مدي تأثير التغير في أى من هذه المعطيات علي الحل الأمثل فسوف نناقشة تفصيلا فيما بعد تحت موضوع تحليل الحساسية.

صياغة المشكلة رياضيا :

أوضحنا سابقا أن مشكلة البرمجة الخطية هي مشكلة توزيعا أمثل للموارد المحدودة علي استخدامات مختلفة . ويتضح من هذا المفهوم أن صياغة مشكلة البرمجة الخطية تستلزم جزئين أساسيين هما (١) دالة الهدف .. والتي يقاس بها أثر الحل المقترح علي كفاءة توزيع الموارد وذلك حتي نصل إلي الحل الأمثل الذي يعظم قيمة دالة الهدف إلي أقصي رقم ممكن (أو يقللها في حالة تخفيض التكاليف)

و (٢) القيود ... وهي التعبير الرياضي عن الحدود الموضوعة علي الموارد والناتجة عن الطبيعة الفنية للعملية الانتاجية .

دعنا الآن نضع ذلك موضع التطبيق حسب المثال المستخدم .

أولا : دالة الهدف

تتكون دالة الهدف من عدة أجزاء كل منها يعبر عن الربح (أو التكلفة) المحقق من انتاج وبيع كل سلعة من السلع محل الاقتراح . وبذلك فإن دالة الهدف تعبر عن الربح (أو التكلفة) الإجمالي . وهي كما يلي :

إجمالي الربح = الربح المحقق من السلعة الأولي + الربح المحقق من السلعة الثانية .

$$ر = ١٠س_{١} + ٩س_{٢}$$

وذلك علي أساس أن قيم كل من $س_{١}$ ، $س_{٢}$ غير معروفة حتي الآن وأن ١٠ ، ٩ جنيه هي ربح الوحدة من كل من المكتب والمقعد علي التوالي . وبافتراض أن أرقام الربح (أوالتكلفة) للسلع ن الممكن انتاجها هي $أ_{١}$ ، $أ_{٢}$ ، $أ_{٣}$ ، ... $أ_{ن}$ علي التوالي ، فإن دالة الهدف يمكن صياغتها بشكل عام علي النحو التالي :

$$\text{عظم (أو قلل)}\ د = أ_{١}س_{١} + أ_{٢}س_{٢} + ... + أ_{ن}س_{ن}$$

ثانيا : القيود :

بتأمل المثال الحالي نجد أن لدينا نوعين فقط من القيود ، المادة الخام وطاقة الورشة . أما الأول فيمكن صياغته علي النحو التالي :

(كمية الخشب للمكاتب + كمية الخشب للمقاعد) لا تزيد عن (كمية الخشب الأسبوعية)

ففي حالة انتاج $س_١$ من المكاتب فإن إجمالي الخشب اللازم هو $٥س_١$ وذلك علي أساس أن كل وحدة تحتاج إلي خمسة ألواح .وكذلك فإن كمية الخشب اللازمة أسبوعيا لانتاج المقاعد تكون $٤س_٢$.أما عبارة لا تزيد عن فتعني أن إجمالي الأخشاب المستخدمة من الممكن أن تكون أقل من أو تساوي كمية الأخشاب المتاحة أسبوعيا . أما أنها تساوي الحد الأقصي فذلك مفهوم بديهيا أما لماذا قد تقل عن الكمية المتاحة حيث أن ذلك يعني عدم استخدام كل الأخشاب المتاحة وهذه تمثل ضياع للموارد ؟ الإجابة علي هذا السؤال تكمن في أن هناك قيودا أخري علي العملية الانتاجية. فقد يكون من غير الممكن استخدام كل الأخشاب بسبب عدم وجود مادة خام أخري (مثل الغراء) أو عدم وجود ساعات عمل كافية في ورشة النجارة . فمشكلة البرمجة الخطية تأخذ في الحسبان كل القيود معا وليس قيدا واحدا فقط .

وتكون صياغة القيد الأول هي :

$$٥س_١ + ٤س_٢ \leq ١٢٠ \qquad (١)$$

علي أساس أن ≥ تعبر عن أقل من أو يساوي

وبنفس المنطق يمكن الوصول إلي القيد الثاني الخاص بالطاقة المستخدمة في ورشة النجارة علي النحو التالي :

(عدد ساعات العمل للمكاتب) + (عدد ساعات العمل للمقاعد)

لا تزيد عن (عدد ساعات العمل الأسبوعية)

$$٢س_{١} + ٤س_{٢} \leq ٦٠ \qquad (٢)$$

ويهمنا الآن أن نوضح عدة حقائق هامة خاصة بهذه القيود :

(أ) يجب أن تكون الوحدة المستخدمة للقياس في نفس القيد ثابتة . فالألواح هي المستخدمة في تقدير كمية الأخشاب اللازمة للمكاتب والمقاعد وهي ذاتها الوحدة المستخدمة في الطرف الأيسر من المتباينة .

(ب) ليس من الضروري أن تكون وحدة القياس المستخدمة لكل القيود ثابتة . فالقيد الأول يستخدم الألواح بينما يستخدم القيد الثاني ساعات العمل في طرفي المتباينة .

(ج) العلاقة الأساسية الواجب مراعاتها بين القيود جميعا هي استخدام نفس الوحدة الزمنية . فطالما أن المطلوب هو تحديد الكميات المنتجة من المكاتب والمقاعد في الأسبوع فيجب أن يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الأولي عن كمية الأخشاب المتاحة في الأسبوع وأن يعبر الطرف الأيسر من المتباينة الثانية عن عدد ساعات العمل المتاحة في الأسبوع أيضا .

(د) ليس من الضروري أن تمثل كل من السلعتين في القيد ، فقد يكون القيد خاصا بسلعة واحدة فقط وذلك عندما يكون هناك قيود بيعية مثلا . ومثال ذلك ألا يستوعب السوق أكثر من عدد معين من المكاتب فى الأسبوع .

(هـ) هناك نوع آخر من القيود يتم إضافته قبل البدء في حل المشكلة ويعد جزءا أساسيا في حالة إنتاج السلع وهو القيد الذي يضمن ألا تكون أرقام الإنتاج أرقاما سالبة . فمن غير المعقول مثلا أن يكون عدد الوحدات الواجب انتاجها من المكاتب هو - ١٠ . ويطلق علي هذا القيد عدم السالبية Non-negativetity constraint ويتم صياغته علي النحو التالي :

$$س_١ \leq صفر$$

$$س_٢ \leq صفر$$

$$أو س_١ ، س_٢ \leq صفر$$

ويعني ذلك أن كلا من عدد المكاتب والمقاعد المنتجة يمكن أن يكون صفرا أو أكثر من صفر .

يمكن الآن إجمال الصيغة الرياضية لهذه المشكلة كما يلي :

$$عظم : ر = ١٠ س_١ + ٩ س_٢$$

في ظل القيود :

٥س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ ≥ ١٢٠
٢س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ ≥ ٦٠
س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≤ صفر

أما الصفية العامة فهي :

عظيم : ر = أ$_{١}$ س$_{١}$ + أ$_{٢}$ س$_{٢}$ + ... + أ$_{ن}$ س$_{ن}$

في ظل القيود :

م$_{١١}$ س$_{١}$ + م$_{٢١}$ س$_{٢}$ + ... + م$_{ن١}$ س$_{ن}$ ≥ ب$_{١}$

م$_{١٢}$ س$_{١}$ + م$_{٢٢}$ س$_{٢}$ + ... + م$_{ن٢}$ س$_{ن}$ ≥ ب$_{٢}$

م$_{١ع}$ س$_{١}$ + م$_{٢ع}$ س٢ + ... م$_{نع}$ س$_{ن}$ ≥ ب$_{ع}$

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، .... ، س$_{ن}$ ≤ صفر

وذلك على أساس أن م تعبر عن المعامل الخاص بالسلعة في القيد ويرمز الرقم الأول أسفل م إلي رقم القيد (عدد القيود ع) والرقم الثاني إلي رقم السلعة (عدد السلع ن) ـ ومعني ذلك أن م$_{٢١}$ تعني مثلا معامل السلعة الثانية في القيد الأول . أما ب فتعبر عن القيد الموجود في المتباينة . فمثلا ب$_{١}$ تعبر عن إجمالي المادة الخام الأولي المتاحة والتي لا يمكن تجاوزها خلال فترة زمنية محددة .

ملحوظة هامة :

سوف نري فيما بعد أن مشكلة البرمجة الخطية يمكن استخدامها أيضا في الحالات التي يكون الهدف فيها هو تقليل التكاليف وعندما تكون القيود في شكل ≤ أو = .

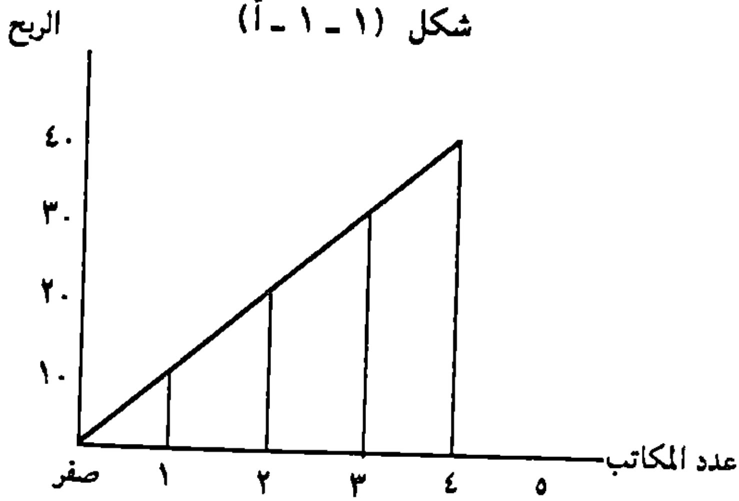
الفروض الأساسية لأسلوب البرمجة الخطية

قبل الشروع في إيضاح كيفية حل مشكلة البرمجة الخطية يجب أن نوضح الفروض الرياضية الأساسيـة التي يقوم عليها هذا الأسلوب . والسبب في ذلك في رأينا هو أن القائم باستخدام هذا الأسلوب يجب عليه التأكد أولا وقبل كل شئ من تحقق هذه الشروط في الحالة التي يواجهها . فاستخدام هذا الأسلوب في غير موضعه سوف يؤدي إلي نتائج سيئة قد تشكك الإدارة تماما في كل أساليب بحوث العمليات. علاوة علي أن هناك أسـاليب أخري رياضية متقدمـة يمكن استخدامها في حالة عدم تحقق هذه الشروط ومثال ذلك البرمجـة غير الخطيـة Non - linear Programming. وسوف نجمل الفروض فيما يلي:

١ ـ كل العلاقات الرياضية في الصياغة ، سواء في دالة الهدف أو القيود ، هي علاقات خطية linear . ويعني ذلك أن معامل الربح (التكلفة) ومعامل العملية الإنتاجية في القيود لا يرتبط بحجم النشاط فأيا كان رقم الانتاج والمبيعات فإن رقم ربح (أو تكلفة) الوحدة من السلعة ثابت، كما أن عدد الوحدات اللازمة من كل مورد (مادة خام أو ساعات عمل) لانتاج وحدة من

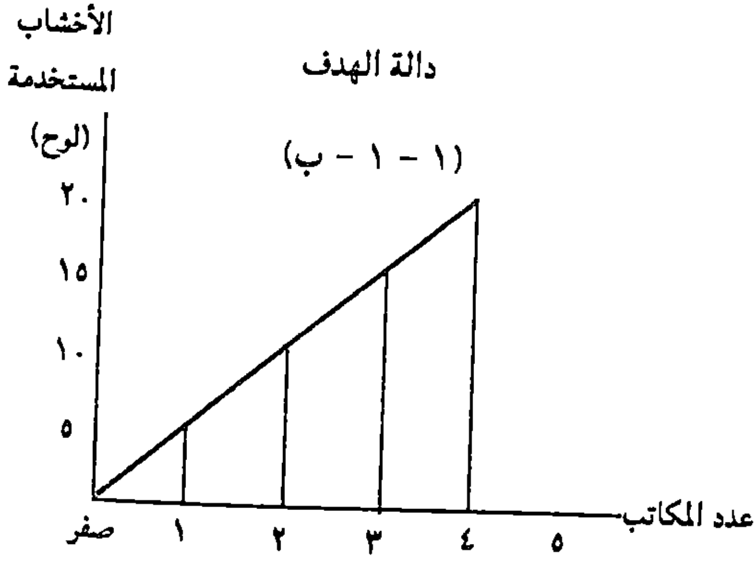
السلعة ثابتة . فإذا كانت الوحدة المنتجة تحقق ربحا قدره عشرة جنيهات فإن الوحدتين يحققان ربحا قدره عشرون .... وهكذا . ويعني ذلك بلغة الأعمال عدم وجود خصم كمية وعدم تحقيق وفورات في العملية الانتاجية نتيجة لتغير حجم النشاط. فانتاج مكتب واحد يستلزم خمسة ألواح من الأخشاب بينما انتاج مكتبين يحتاج عشرة .. وهكذا ، ومن السهل تصور أن كل من هذه تأخذ شكل علاقة خطية كما في الأشكال (١ـ١ـ أ) ، (١ -١-ب) .

شكل (١ ـ ١ ـ أ)



دالة الهدف

(١ - ١ - ب)



القيد الأول

ويجب الإشارة هنا إلي أنه ليس من الضروري عمل مثل هذا الرسم لمعرفة توافر فرض الخطية . فالقاعدة أنه طالما أن دالة الهدف والقيود تخلو من الحالات التي يكون فيها أس المتغيرات الواجب تحديد قيمة بشأنها غير معادل للوحدة ، فإن العلاقة تكون خطية ويعني ذلك أنه إذا وجدت $س_١^٢$ أو $\sqrt{س_١}$ مثلا فإن العلاقة تعد غير خطية.

٢ ـ أن قيم كل من الموارد المتاحة (الجانب الأيسر من متباينات القيود) ، ومدى مساهمة الوحدة فى دالة الهدف (الربح أو الخسارة للوحدة) ، ومعاملات الانتاج الفنية فى القيود (م) ، تكون جميعها معروفة وثابتة . فالحل يعد صحيحا عند هذه القيم فقط . كما أنه ليس هناك مجال لعدم التأكد أو الخطر فكل شئ معروف وسوف يتحقق فى المستقبل بنفس القيمة . فى حالة عدم التأكد يتم استخدام أساليب أخرى مثل stochastic programming .

٣ ـ من الممكن أن تكون قيم متغيرات الحل أرقاما صحيحة integers جميعها، أو بعضها صحيح والبعض الآخر كسر ، أو بكليها كسور. هناك أساليب أخرى تستخدم فى حالة النص على أن تكون الأرقام صحيحة فقط مثل integer programming .

بعد أن أوضحنا الفروض الأساسية التى يقوم عليها أسلوب البرمجة الخطية سوف نعرض لكيفية حل هذه المشكلة ، والتى تتوفر فيها الشروط السابقة ، مبتدئين بأسلوب الرسم البيانى .

استخدام أسلوب الرسم البياني فى الحل :

يستخدم هذا الأسلوب فى حل مشكلة البرمجة الخطية عندما لا يزيد عدد المتغيرات (س) علي اثنين أو ثلاثة على أكثر تقدير . ويرجع ذلك الى الاستحالة العملية لرسم أكثر من ثلاثة محاور لتصوير المشكلة بيانيا ، حتى أنه من المفضل عدم استخدام هذا الأسلوب عندما تزيد المتغيرات عن اثنين . ومن مزايا هذا الأسلوب البساطة كما أنه يعد أساسا لتفهم تماما ما يقوم به أسلوب السمبلكس لحل هذه المشكلة فى حالة أى عدد من المتغيرات وأي عدد من القيود. ويمكن تلخيص خطوات هذه الطريقة فيما يلى :

١ ـ صياغة المشكلة فى شكل نموذج رياضي .

٢ ـ رسم القيود فى شكل بيانى وتحديد المنطقة الممكنة Feasible area

٣ ـ اختيار الحل الأمثل .. ويتم ذلك عن طريق :

(أ) تقييم الربح عند النقط الركنية .

أو (ب) رسم دالة الهدف بيانيا .

وسوف نقوم بشرح هذه الخطوات بحل المثال الخاص بشركة الأثاث .

الخطوة الأولى : الصياغة الرياضية :

عظيم : ر = ١٠ س$_{١}$ + ٩ س$_{٢}$

فى ظل: ٥ س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ ≥ ١٢٠ قيد المادة الخام (الخشب)

$٢س_١ + ٤س_٢ \leq ٦٠$ قيد ساعات العمل (الورشة)

$س_١ ، س_٢ \geq$ صفر قيد عدم السالبية

الخطوة الثانية : رسم القيود فى شكل بيانى :

يبين الشكل (١ـ٢) أحد الخطوط المستقيمة الذى يعبر عن قيد المادة الخام . وقد بدأت العملية برسم محورين أما الأفقى فيمثل الكميات المنتجة من المكاتب $س_١$ ، والرأسي يمثل الكميات المنتجة من المقاعد $س_٢$. ولرسم القيد الأول يتم تجاهل علاقة $\leq$ ونفترض أنها = فقط حيث أننا تعودنا كيف نرسم الخط المستقيم حسب قواعد الهندسة التحليلية . وطالما أن هذا خط مستقيم وسوف يتقاطع مع المحاور فأن أفضل طريقة لرسمه هى تحديد نقطتي التقاطع مع المحاور وتوصيلهما ولتحقيق ذلك :

* افرض أن $س_١ =$ صفر

من المعادلة $٥ س_١ + ٤ س_٢ = ١٢٠$

يكون $٤ س_٢ = ١٢٠$ ومنها $س_٢ = ٣٠$

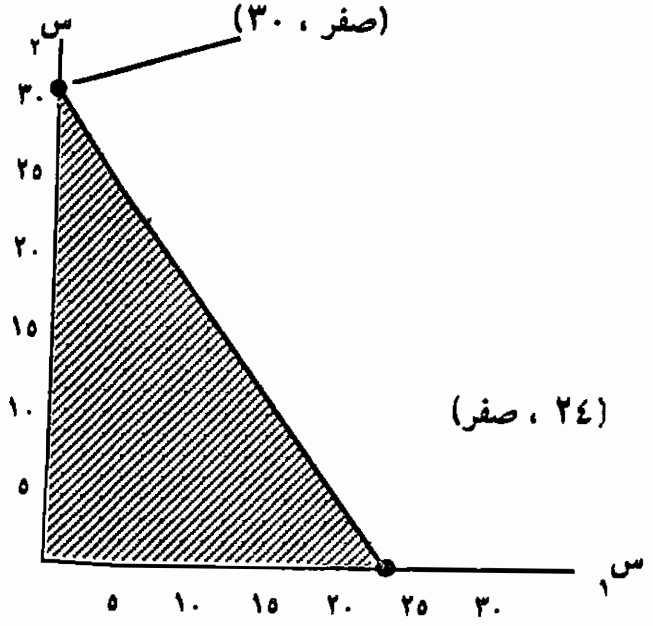
ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الرأسى (حيث $س_١ =$ صفر) هى (صفر ، ٣٠) .

* أفرض أن $س_٢ =$ صفر

من المعادلة $٥ س_١ + ٤ س_٢ = ١٢٠$

يكون $٥ س_١ = ١٢٠$ ومنها $س_١ = ٢٤$

ويعنى ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الأول مع المحور الافقى (حيث $س_٢$ = صفر) هى (٢٤ ، صفر) . وبتوصيل تلك النقطتين يتم التوصل الى الخط المستقيم الذى يمثل القيد . ويلاحظ هنا أنه لم يتم مد الخط لأكثر من ذلك لأن الامتداد يقع فى مناطق يكون فيها أى من $س_١$ أو $س_٢$ رقم سالب وذلك يتعارض مع شرط عدم السالبية الذى تم اضافته عند صياغة المشكلة . وبالرجوع أيضا الى الصيغة التى كان عليها القيد الأول نجد وجود اشارة ≥ وهى تعني أن أى نقطة على الخط أو تحت الخط تحقق هذا القيد - فاذا تم اختيار أية نقطة داخل المنطقة المظللة واسقط منها أعمدة على المحور الرأسي والافقى لتحديد قيم $س_١$ ، $س_٢$ ، وتم التعويض فى الطرف الأيمن من متباينة القيد الأول لوجدنا أن القيمة (التى تعبر عن اجمالى الأخشاب اللازمة) لاتزيد بأى حال من الأحوال عن الطرف الأيسر للمتباينة وهو ١٢٠ . ولذلك فان القيد يتم قراءته الى أسفل والمنطقة المظللة تعبر عن جميع



الحلول الممكنة حسب القيد الأول فقط . أما أي نقطة أعلي من هذا الخط فيجب عدم التفكير فيها حيث أنها تستلزم أخشاب أكثر من الكميات المتاحة .

وطالما أن الهدف هو إيجاد حلا تسمح به كل القيود فيجب أيضا رسم باقى القيود بنفس الكيفية السابقة ثم تحديد المنطقة الممكنة حسب كل القيود . ولرسم القيد الثانى نقوم بنفس الخطوات :

* افرض أن $س_١$ = صفر

من المعادلة ٢ $س_١$ + ٤ $س_٢$ = ٦٠

يكون ٤ $س_٢$ = ٦٠ ومنها $س_٢$ = ١٥

ويعني ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثاني مع المحور الرأسي (حيث $س_١$ = صفر) هي (صفر ، ١٥)

افرض أن $س_٢$ = صفر

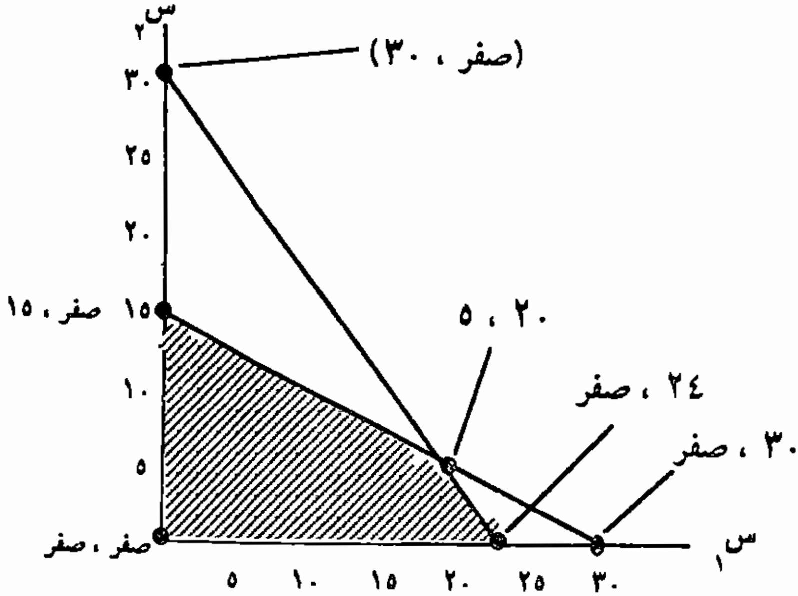
من المعادلة ٢$س_١$ + ٤$س_٢$ = ٦٠

يكون ٢$س_١$ = ٦٠ ومنها $س_١$ = ٣٠

ويعني ذلك أن نقطة تقاطع خط القيد الثاني مع المحور الأفقي (حيث $س_٢$ = صفر) هي (٣٠ ، صفر) وبتوصيل تلك النقطتين يتم

التوصل إلي الخط المستقيم الذي يمثل القيد الثاني ويتم قراءته علي أساس ≥ وليس = فقط ، وبوضع هذا الخط مع خط القيد الأول كما في

شكل (١ ـ ٣)



الشكل (١ - ٣) يتضح أن إضافة هذا القيد يترتب عليها استبعاد منطقة (المثلث العلوي) والتي كانت تعتبر ممكنة حسب القيد الأول فقط . ونتيجة لذلك يكون لدينا المنطقة الممكنة حسب القيدين وهي المنطقة المظللة في الشكل (١ - ٣). ويجب أن ننوه هنا إلي أن هذه المنطقة المظللة ليست بالضرورة تشمل نقطة الأصل (صفر ، صفر) أو تتلامس مع المحاور كما في هذا المثال ولكنها من الممكن أن تأخذ أى شكل هندسي له أضلاع مستقيمة (يطلق عليه Simplex) وذلك حسب شكل القيود كما سنري في أمثلة تالية .

الخطوة الثالثة : اختيار الحل الأمثل :

ويتم في هذه الخطوة اختيار الحل الأمثل Optimal solution وذلك من بين كل الحلول الممكنة لمشكلة البرمجة الخطية . وهوكما

أوضحنا الحل الذي يعظم (أو يقلل min) من قيمة دالة الهدف . ويمكن القيام بهذه الخطوة في ظل الطريقة البيانية إما اعتمادا علي (أ) تقييم كافة النقط الركنية أو (ب) رسم دالة الهدف . وسوف نتناول بالايضاح كيفية استخدام كل من هذين المدخلين في استكمال حل المثال الحالى .

(أ) عن طريق تقييم النقط الركنية Corner Points :

طالما أن القيود الموجودة في المشكلة هي قيود خطية ودالة الهدف دالة خطية وللمشكلة حلا أمثل فإن قواعد الرسم تقتضي أن يقع هذا الحل في واحدة علي الأقل من النقط الركنية exteme or corner Points وبالنظر إلي الرسم في الشكل (١ - ٣) يتضح أن هذه النقط الركنية هي :

(صفر ، صفر)، (صفر ، ١٥) ، (٢٤ ، صفر) ، ونقطة تقاطع القيدين الأول والثاني .

ولاستكمال معرفة جميع النقط الركنية يمكن اسقاط أعمدة علي المحاور ، ولكن ذلك دائما غير مضمون العواقب نظرا لعدم دقة الرسم البياني في كثير من الحالات . ولذلك نعود إلي قواعد الجبر ونحل المعادلتين معا .

$$\text{٥س}_{١} + \text{٤س}_{٢} = ١٢٠ \longrightarrow (١)$$

$$\text{٢س}_{١} + \text{٤س}_{٢} = ٦٠ \longrightarrow (٢)$$

بطرح (٢) من (١) تكون النتيجة

$3س_1 = 60$ ومنها $س_1 = 20$

بالتعويض في (٢) نجد أن

$2(20) + 4س_2 = 60$

ومنها $4س_2 = 20$ ومنها $س_2 = 5$

ويعني ذلك أن النقطة الركنية الرابعة هي (٥ ، ٢٠) ويمكن التأكد من ذلك من الرسم إذا كان دقيق .

ويمكن تقدير الأرباح المتوقعة عند تلك النقط الركنية (الحلول الممكنة) حسب الجدول التالي :

النقطة الركنية		مقدار الأرباح حسب دالة الهدف $ر = 10س_1 + 9س_2$
$س_1$	$س_2$	
صفر	صفر	١٠ × صفر + ٩ × صفر = صفر
صفر	١٥	١٠ × صفر + ٩ × ١٥ = ١٣٥
٢٤	صفر	١٠ × ٢٤ + ٩ × صفر = ٢٤٠
٢٠	٥	١٠ × ٢٠ + ٩ × ٥ = ٢٤٥

ويتضح من هذا الجدول أن الحل الأمثل Optimal Solution هو في النقطة الركنية (٥ ، ٢٠) . ويعني ذلك أن $س_1 = 5$ ، $س_2 = 20$.

وهو توليفة تعني انتاج خمسة مكاتب وعشرون مقعدا . وذلك سوف يحقق ربحا قدره ٢٤٥ جنيها أسبوعيا للمنشأة .

(ب) عن طريق رسم دالة الهدف :

يمكن التوصل إلي نفس الحل الذي توصلنا إليه في طريقة تقييم النقط الركنية بأسلوب أيسر عن طريق رسم دالة الهدف . وتبدأ هذه الطريقة باختيار رقما للربح (يفضل أن يكون رقما تسهل معه العمليات الحسابية في دالة الهدف) وليكن ١٨٠ جنيه . وقد تم اختياره بحيث يسمح بالقسمة علي ٩ ، ١٠ في دالة الهدف دون وجود قيمة غير صحيحة من $س_١$ ، $س_٢$. وتكون الخطوة التالية هي رسم هذا الخط علي الشكل رقم (١ – ٤) الموجود به المنطقة الممكنة حسب كل القيود. ولرسم دالة الهدف نتبع الأسلوب السابق المستخدم في رسم القيود كما يلي :

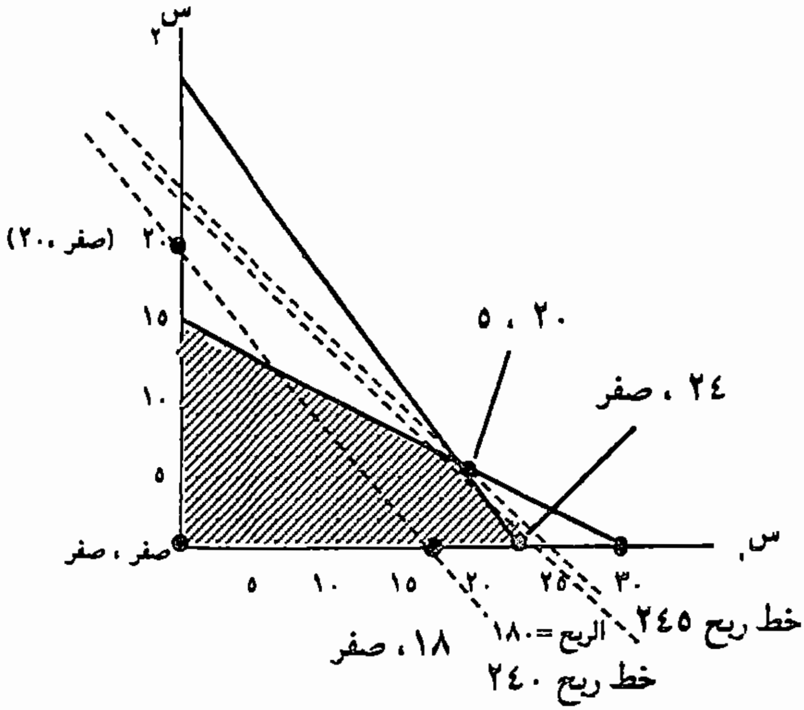
$$١٠س_١ + ٩س_٢ = ١٨٠$$

افرض أن $س_١$ = صفر ومنها $س_١$ = ٢٠ ---> نقطة (صفر ، ٢٠)

افرض أن $س_٢$ = صفر ومنها $س_١$ = ١٨ ---> نقطة (١٨ ، صفر)

برسم هذا الخط يكون لدينا خطا مستقيما يسمي خط الربح الثابت Iso-profit line . ويعني ذلك أن أى نقطة علي الخط تحقق المعادلة $١٠س_١ + ٩س_٢ = ١٨٠$. ويمكن التأكد من ذلك بافتراض أى نقطة علي الخط من الرسم البياني .

شكل (١ ـ ٤)



وبتأمل هذا الخط يتضح أنه يمكن تحسين الأرباح ، فرقم ١٨٠ ليس أفضل الأرباح ـ نظرا لأن هذا الخط يمر في داخل المنطقة الممكنة وما زال أمامنا فرصة تحريك الأرباح إلي أعلي ، فإذا حاولنا أي رقم للأرباح أعلي من ١٨٠ فإن ذلك سوف يؤدي إلي خطأ موازيا تماما للخط الحالي ويقع إلي أعلي هذا الخط . وترجع خاصية التوازي لتلك الخطوط إلي حقيقة أن ميل الخط ثابت علي الرغم من تغير الطرف الأيسر من قيمة دالة الهدف . فالميل محكوم بمعاملات الربح لكل من $س_١$ ، $س_٢$ وهما ثابتان . وباستمرار عملية التحريك إلي أعلي نجد أنه عند نقطة تقاطع القيدين يمس خط الربح المنطقة الممكنة وأى محاولة

بعد ذلك لتحريك الخط إلي أعلي يترتب عليها الخروج عن تلك المنطقة ويعني ذلك أن النقط التي علي الخط كلها غير ممكنه ـ ويترتب علي ذلك أن الخط المماس في نقطة التقاطع يكون هو أعلي ربح ممكن ونقطة التقاطع هي الحل الأمثل Optimal Solution . وبنفس الطريقة السابقة يمكن تحديد قيمة س$_{١}$ ، س$_{٢}$ عند نقطة التقاطع بحل المعادلتين معا . وسوف يؤدي ذلك إلي س$_{١}$ = ٢٠ ، س$_{٢}$ = ٥ والربح في هذه الحالة يتم حسابه بالتعويض في دالة الهدف ، وهو يعادل ٢٤٥ جنيها كما في الطريقة السابقة .

ملحوظة :

طالما أن رقم ١٨٠ قد تم اختياره بشكل تحكمي إلي حد ما فإن الرقم المختار قد يؤدي إلي رسم خط ربح ثابت يقع بالكامل في أعلي المنطقة الممكنة . ومثال ذلك اختيار ٣٦٠ جنيه . وفي هذه الحالة يتم رسم خطوط موازية لخط ٣٦٠ وإلي أسفل هذا الخط حتي يلامس آخر خط أول نقطة من المنطقة الممكنة . عندئذ نتوقف ونعتبر هذه النقطة الركنية عند المماس هي الحل الأمثل .

ملحوظات علي الحل :

يوضح الحل النهائى في هذا المثال ما يأتي :

١ ـ هذا هو حلا أمثل وحيد Unique Optimal Solution ويعني ذلك

أن النقطة $س_١ = ٢٠$ ، $س_٢ = ٥$ هي النقطة الممكنة الوحيدة ذات أعلي قيمة لدالة الهدف . وأن أى نقطة ممكنة أخري تحقق ربحا أقل . وسوف نناقش فيما بعد حالة تعدد الحلول المثلي .

٢ ـ أن مجرد توزيع الموارد علي أساس ربحية الوحدة دون أخذ في الحسبان القيود . لا يعد صحيحا . فعلي سبيل المثال علي الرغم من أن ربحية المكتب الواحد أعلي من الكرسي إلا أن تعظيم الربح الإجمالي يتطلب انتاج كل من المكتب والمقعد . فإذا تم تخصيص كل الموارد للمكاتب فإن أعلي رقم يمكن انتاجه في ظل القيدين هو ٢٤ مكتب وذلك يحقق ربحا إجماليا قدره ٢٤٠ جنيها والذي هو أقل من ربح الحل الأمثل .

٣ ـ لا يجب أن يفهم من هذا المثال أن الحل الأمثل يكون دائما في نقطة تقاطع القيود . فأحيانا يقع الحل الأمثل علي أحد المحاور (التي هي نقط تقاطع أيضا) . ويعني الحل في مثل تلك الحالة انتاج سلعة واحدة وعدم انتاج السلعة الأخري . وحقيقة يتوقف ذلك علي ميل دالة الهدف .

استخدام الأسلوب البياني في حل مشكلة تقليل التكاليف:

يتشابه استخدام الطريقة البيانية في حالة مشكلة تقليل التكاليف Cost minimization مع استخدامها في حالة مشكلة تعظيم الربح التي أوضحناها في المثال السابق . والفارق الوحيد سوف يكون

في خطوة اختيار الحل الأمثل كما سوف يتضح في المثال التالي :

مثال (١ - ٢) :

في إحدي الكليات العسكرية ، طلب من المسئول عن التغذية The academy dietitian أن يحدد المكونات الأساسية لوجبة الإفطار لطلبة الكلية ، وكان أمام الرجل (أو السيدة) أن يضمن أن الوجبة تفي بالحد الأدني اللازم من البروتين وفيتامين (أ) والحديد لطالب الكلية . وقد اتضح أنه يمكن تدبير هذه المتطلبات من نوعين من الغذاء غ$_1$ ، غ$_2$ ، (فول ، بيض مثلا) (في هذه الحالة فقط يمكن استخدام الطريقة البيانية) ، ويوضح الجدول التالي مدي توافر الاحتياجات الأساسية في هذين النوعين من الغذاء والحد الأدني اللازم من كل منهما .

المستلزمات	الكميات المتوفرة في أوقية واحدة من غ$_2$	الكميات المتوفرة في أوقية واحدة من غ$_1$	الحد الأدني في الوجبة
البروتين (وحدة)	٢	٢	١٠
فيتامين أ (وحدة)	٢	١	٧
الحديد (وحدة)	١ $\frac{١}{٣}$	٢	٨

وكانت تكلفة الأوقية من الغذاء الأول هي ثلاثة قروش وتكلفة الأوقية من الغذاء الثاني أربعة قروش . والمشكلة الآن هي تحديد

الكميات اللازمة من كل من الغذائين في الوجبة مع تقليل التكاليف إلي أقل حد يمكن .

الخطوة الأولي : صياغة المشكلة رياضيا :

بفرض أن المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها هي :

$س_١$ = الوزن من $غ_١$ المستخدم في الوجبة (بالأوقية)

$س_٢$ = الوزن من $غ_٢$ المستخدم في الوجبة (بالأوقية)

فإن دالة الهدف تكون من جزئين كما يلي :

التكاليف الكلية لوجبة = ت الجزء المستخدم من $غ_١$ + ت الجزء المستخدم من $غ_٢$

أي أن : ت = ٣$س_١$ + ٤$س_٢$ -----> دالة الهدف

والمطلوب هو تقليل هذه القيمة ت إلي أقل حد ممكن مع مراعاة القيود الخاصة بمواصفات الوجبة وهي :

((كمية البروتين في الوجبة من $غ_١$) + (كمية البروتين من الوجبة في $غ_٢$) = علي الأقل ١٠ وحدات.

ويعني ذلك رياضيا :

٢$س_١$ + ٢$س_٢$ ≤ ١٠ (وحدات من البروتين) ---> قيد ١

كذلك فإن قيد الفيتامينات يمكن صياغته علي النحو التالي :

٢س$_{١}$+١س$_{٢}$ ≥ ٧ (وحدات من فيتامين أ)---> قيد ٢

كما أن قيد الحديد يكون كما يلي :

$\frac{١}{٣}$ ١س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ ≥ ٨ (وحدات من الحديد) ---> قيد ٣

ويضاف شرط عدم السالبية س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ≥ صفر

الخطوة الثانية : ارسم القيود وحدد المنطقة الممكنة :

لرسم القيد الأول دع ٢س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ١٠

عند س$_{١}$ = صفر سوف تصبح س$_{٢}$ = ٥ --> النقطة (صفر ، ٥)

عند س$_{٢}$ = صفر سوف تصبح س$_{١}$ = ٥ --> النقطة (٥ ، صفر)

ولرسم القيد الثاني دع ٢س$_{١}$ + ١س$_{٢}$ = ٧

عند س$_{١}$ = صفر سوف تصبح س$_{٢}$=٧ ---> النقطة (صفر ، ٧)

عند س$_{٢}$= صفر سوف تصبح س$_{١}$ = ٣,٥ --> النقطة (٣,٥ ، صفر)

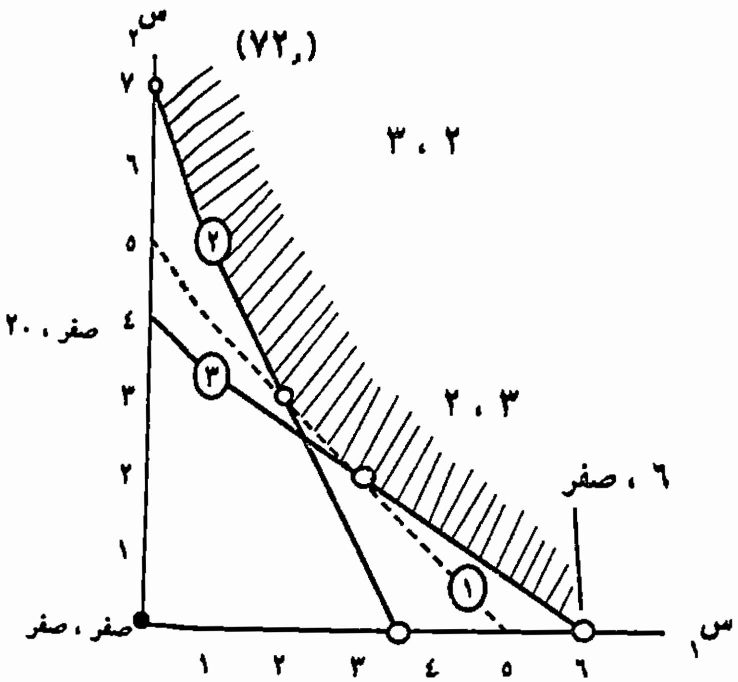
ولرسم القيد الثالث دع $\frac{١}{٣}$١ س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ٨

عند س$_{١}$ =صفر سوف تصبح س$_{٢}$ = ٤ ---> النقطة (صفر ، ٤)

عند س$_{٢}$ =صفر سوف تصبح س$_{١}$ = ٦ ---> النقطة (٦ ، صفر)

برسم القيود الثلاثة كما في الشكل (١ - ٤) وقراءة القيود حسب معناها ≥ يتضح أن المنطقة الممكنة هي المنطقة التي تقع إلي أعلي القيود الثلاثة وهي المنطقة المظللة أو أي نقطة في أعلاها .

شكل (١ - ٥)



الخطوة الثالثة : اختيار الحل الأمثل :

(أ) عن طريق اختبار النقطة الركنية ... أمامنا أربعة نقط ركنية يمكن تحديدها في المنطقة الممكنة وهي: (صفر ، ٧) (٦، صفر)، نقطة تقاطع القيود (١)،(٢)، نقطة تقاطع القيود (١)،(٣) ولتحديد نقطة التقاطع (١)،(٢) يتم ذلك كما يلي :

٢س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ = ١٠ ---> (١)

٢س$_{١}$ + ١س$_{٢}$ = ٧ ----> (٢)

بطرح (٢) من (١) فإن $س_٢ = ٣$

بالتعويض في (٢) أو (١) عن قيمة $س_٢$ فإن قيمة $س_١ = ٢$

وعلي ذلك فإن نقطة التقاطع هي (٢ ، ٣)

ولتحديد نقطة تقاطع (١) ، (٣) يتم ما يلي :

$٢س_١ + ٢س_٢ = ١٠$ ---> (١)

$\frac{١}{٣}$ ١$س_١ + ٢س_٢ = ٨$ ---> (٢)

بطرح (٢) من (١) فإن $س_١ = ٢ \times \frac{٣}{٢} = ٣$

بالتعويض في (١) أو (٢) فإن $س_٢ = ٢$

∴ نقطة التقاطع هي (٣ ، ٢)

ويمكن الآن تقدير التكاليف المتوقعة عند تلك النقط الركنية حسب دالة الهدف كما في الجدول التالي :

النقطة الركنية	دالة الهدف ت = $٣س_١ + ٤س_٢$
صفر ، ٧	٣(صفر) + ٤(٧) = ٢٨
٢ ، ٣	٣(٢) + ٤(٣) = ١٨
٣ ، ٢	٣(٣) + ٤(٢) = ١٧
٦ ، صفر	٣ (٦) + ٤(صفر) = ١٨

ويتضح منه أن الحل الذي يصل بتكاليف الوجبة إلي أدناها هو استخدام ٣ أوقيات من غ$_{١}$ وأقيتين فقط من غ$_{٢}$ ، حيث تصل التكلفة إلي ١٧ قرش للوجبة .

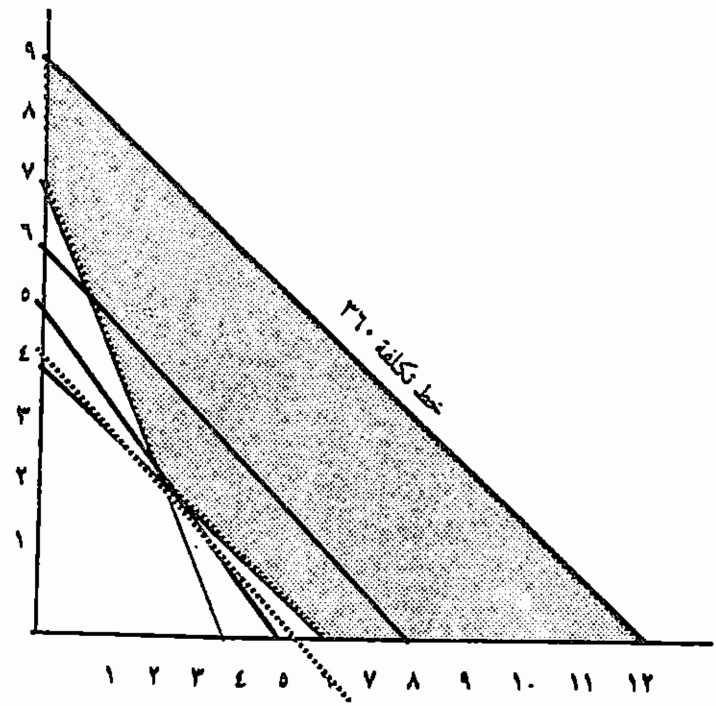
(ب) عن طريقة رسم دالة الهدف ... وكما هو الحال في حالة تعظيم الربح سوف تؤدي هذه الطريقة إلي نفس النتيجة السابقة . وتبدأ الطريقة برسم دالة الهدف عند أية قيمة افتراضية لدالة الهدف ولتكن ٣٦ قرش . ويعني ذلك أنه :

٣س$_{١}$ + ٤س$_{٢}$ = ٣٦

بافتراض س$_{١}$ = صفر --> س$_{٢}$ = ٩ ومنها النقطة (صفر ، ٩)

بافتراض س$_{٢}$ = صفر ---> س$_{١}$ = ١٢ ومنها النقطة (١٢ ، صفر)

شكل (١ ـ ٦)



ومن هاتين النقطتين يمكن رسم خط تكلفة ٣٦ كما في الشكل (١ ـ ٥) والذي يتضح منه أنه علي الرغم من وقوعه في المنطقة الممكنة إلا أنه ما زال أمامنا إمكانية تغيير توليفة $س_١$ ، $س_٢$ حتي يتسني لنا تخفيض التكاليف ـ وبرسم خطوط موازية لهذا الخط تقع إلي أسفل هذا الخط (علي يساره) نجد أن أقل خط يمس المنطقة الممكنة في النقطة الخاصة بتقاطع القيدين (١) ، (٣). وأي محاولة لرسم خط وتكلفة آخر إلي اليسار سوف تؤدي إلي توليفات من $س_١$ ، $س_١$ يصعب تحقيقها لأنها خارج المنطقة الممكنة . ويعني ذلك أن نقطة تقاطع (١)، (٣) هي نقطة الحل الأمثل الذي يقلل التكاليف إلي أقل حد ممكن . ولمعرفة هذه النقطة يتم حل معادلتي القيدين (١)، (٣) معا كما فعلنا سابقا والتي سوف تؤدي إلي أن $س_١$ = ٣، $س_٢$ = ٢ (والتي تتضح من الرسم أيضا) ويمكن تحديد تكلفة الحل = ٣(٣) + ٤(٢) ١٧ = قرش وهي أقل تكلفة ممكنة للوجبة .

أسلوب السمبلكس
Simplex Method

بينا في الجزء السابق كيف تستخدم الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية ، ولكن هناك قصورا واضحا في الطريقة البيانية وهو أنها لا تستخدم إلا في حالة وجود سلعتين فقط أو ثلاثة علي أكثر تقدير . ويرجع ذلك أساسا إلي صعوبة ، بل استحالة ، الرسم البياني عندما يزيد عدد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها عن اثنين . وطالما أن معظم التطبيقات العلمية تتضمن عددا كبيرا من المتغيرات والقيود ، فإننا نحتاج إلي أسلوب آخر صمم خصيصا لذلك يعرف بأسلوب السمبلكس Simplex Method .

يقوم أسلوب السمبلكس ـ الذي قدمه دانتزج Dantzig الأمريكي في عام ١٩٤٧ ـ علي مجموعة من الخطوات الجبرية التي تؤدي إلي الوصول إلي الحل الأمثل ، في حالة وجود حل ، وذلك في عدة مراحل متتابعة ومحددة . ويتم تحقيق ذلك عن طريق تقييم النقط الركنية للمنطقة الممكنة في خطوات متتابعة تؤدي إلي الوصول إلي حلا أفضل في كل مرحلة ، وذلك إلي الحد الذي لا يمكن معه تحقيق تحسين في الحل . عندئذ نكون قد وصلنا إلي الحل الأمثل .

ويمكن تلخيص الخطوات التي تتضمنها طريقة السمبلكس في الخطوات الخمس التالية :

١ ـ ضع مشكلة البرمجة الخطية في الصيغة النمطية Standard form

٢ ـ اختار حل مبدئي ممكن وهو عبارة عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة Intial feasible solution .

٣ ـ تقييم امكانية تحسين الحل القائم Current solution

٤ ـ إذا كان التحسين ممكنا يتم عمل الخطوات التالية :

(أ) حدد المتغير الغير أساسي الغير موجود في الحل الحالي Nonbasic Variable الواجب إدخاله في الحل واعتباره متغيرا أساسيا .

(ب) حدد المتغير الأساسي Basic Variable الموجود في الحل الحالي والواجب خروجه من الحل ، واعتباره متغيرا غير أساسيا .

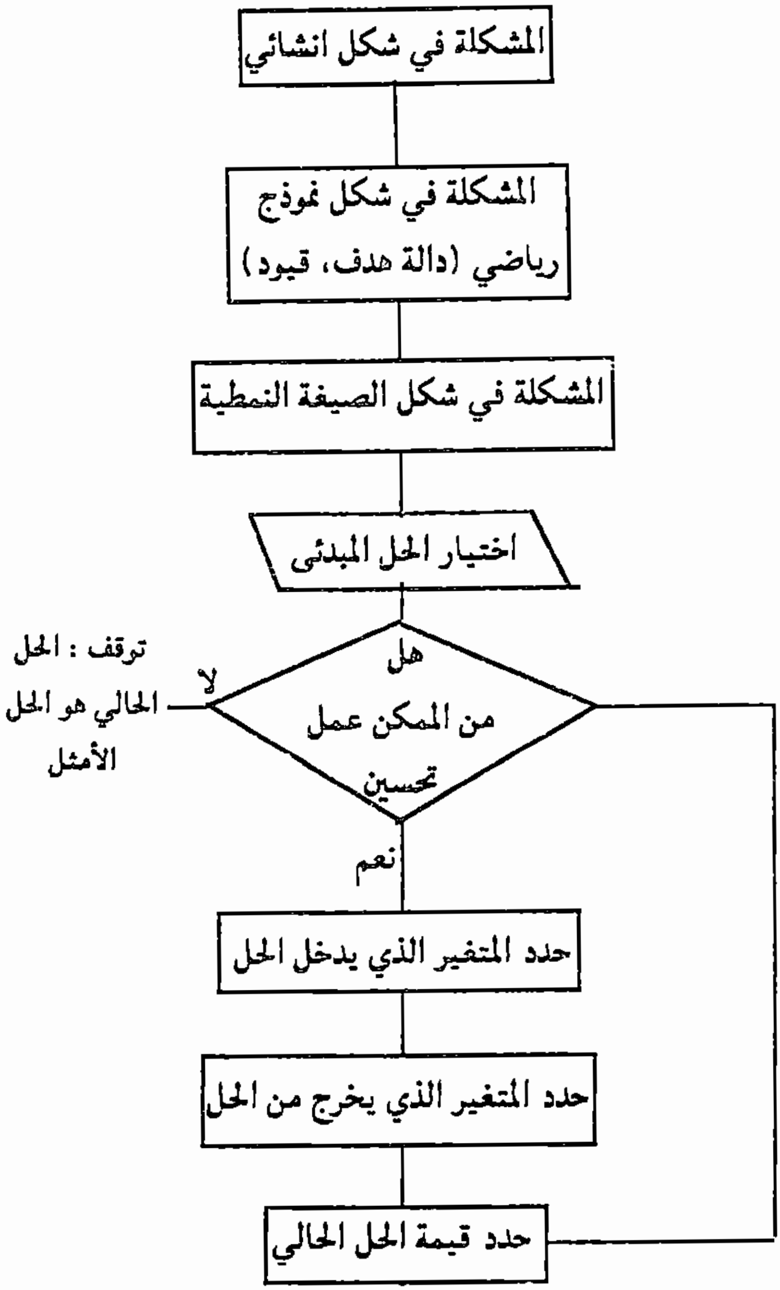
(جـ) حدد قيم المتغيرات الموجودة في الحل الجديد، وهو يعبر عن نقطة ركنية في المنطقة الممكنة، وكذلك حدد قيم المعاملات الجديدة في معادلات القيود .

(د) ارجع إلي الخطوة ٣ وكرر عملية التقييم .

٥ ـ إذا كان التحسين غير ممكنا فإن الحل الذي توصلت إليه يكون هو الحل الأمثل .

ويوضح الشكل (١ – ٧) العلاقة بين هذه الخطوات والتي سوف نبين كيفية القيام بها من خلال عرض المثال التالي :

(شكل ١ - ٧)


المشكلة في شكل انشائي
المشكلة في شكل نموذج رياضي (دالة هدف، قيود)
المشكلة في شكل الصيغة النمطية
اختيار الحل المبدئى
هل من الممكن عمل تحسين
لا
توقف : الحل الحالي هو الحل الأمثل
نعم
حدد المتغير الذي يدخل الحل
حدد المتغير الذي يخرج من الحل
حدد قيمة الحل الحالي

مثال (٢ ـ ١) استخدام أسلوب السمبلكس في حالة تعظيم الربح :

في المثال السابق الخاص بانتاج المكاتب $س_١$ ، والمقاعد $س_٢$ توصلنا إلي الصيغة الرياضية الآتية :

عظم ر = ١٠ $س_١$ + ٩$س_٢$

٥$س_١$ + ٤$س_٢$ ≥ ١٢٠ قيد المادة الخام (١)

٢$س_١$ + ٤$س_١$ ≥ ٦٠ قيد عدد ساعات التشغيل (٢)

$س_١$ ، $س_٢$ ≤ صفر فرض عدم السالبية

وعلي الرغم من أنه من الأيسر الأسلوب البياني هنا نظرا لأن عدد المتغيرات اثنين فقط إلا أننا سوف نوضح كيفية استخدام أسلوب السمبلكس باستخدام نفس المثال حتي يتثني لنا شرح المعني العلمي للخطوات الرياضية التي يقوم عليها أسلوب السمبلكس وذلك من خلال مقارنة الخطوات مع الطريقة البيانية .

الخطوة الأولي : وضع المشكلة في شكل الصيغة النمطية :

ويقصد بذلك تحويل متباينات القيود إلي معادلات ، ويعني ذلك استخدام (=) بدلا من (≥ أو ≤) في القيود . وبتأمل كل من القيدين (١) ، (٢) نجد أن إشارة ≥ تقتضي إضافة متغير جديد علي

يمين المتباينة . وحتي يتمشي ذلك مع معني المتباينة يجب أن تكون قيمة هذا المتغير مساوية للصفر أو أكبر من الصفر (شرط عدم السالبية) . فإذا كانت قيمة المتغير الجديد مساوية للصفر فيعني ذلك أن المتباينة أصبحت معادلة ، وهذا هو معني = في المتباينة .أما إذا كانت قيمة المتغير الجديد أكبر من الصفر فيعني ذلك أن الجانب الأيمن من المتباينة أقل من الجانب الأيسر وهذا هو معني < .

دعنا نتأمل معني ذلك بالنسبة للقيد الأول . بافتراض أن $ع_١$ هي المتغير الجديد فإن القيد الأول يكون :

$$٥س_١ + ٤س_٢ + ع_١ = ١٢٠$$

فإذا كانت $ع_١$ = صفر فإن ذلك يعني أن المادة الخام مستخدمة بالكامل . فالرقم المستخدم من الأخشاب لتصنيع الكراسي مضافا إليه الرقم المستخدم من الأخشاب في تصنيع الترابيزات يساوي تماما الحد الأقصي المتاح من الأخشاب وهو ١٢٠ وحدة . وعندما يكون المتغير $ع_١$ رقما موجبا فيعني ذلك أن الكمية الإجمالية المستخدمة من الأخشاب أقل من ١٢٠ وحدة . ولذلك وضعنا قيمة $ع_١$ موجبة ليكون لدينا معادلة . ويتضح من وصفنا أن قيمة $ع_١$ تعبر عن الكمية غير المستخدمة من الأخشاب ، ولذلك يطلق عليها بصفة عامة أرقام العطل Slack في مشكلة البرمجة الخطية .

وباستخدام نفس المفهوم سوف تقوم بإضافة $ع_٢$ في القيد الثاني

لتعبر عن عدد ساعات غير مستغلة ويصبح القيد هو :

$$٢س_{١} + ٤س_{٢} + ع_{٢} = ٦٠$$

ونظرا لأن أسلوب السمبلكس يقوم علي أسلوب حل المعادلات الآنية : Simultaneous Linear Equations فإن ظهور متغير في أحد المعادلات يقتضي وجوده في المعادلات الآخري . وعلي ذلك فإن الصيغة النمطية Standard form للمشكلة تكون هي :

$$عظم\ ر = ١٠س_{١} + ٩س_{٢} + صفرع_{١} + صفرع_{٢}$$

$$في\ ظل\quad ٥س_{١} + ٤س_{٢} + ع_{١} + صفرع_{٢} = ١٢٠ \longleftarrow (١)$$

$$٢س_{١} + ٤س_{٢} + صفرع_{١} + ع_{٢} = ٦٠ \longleftarrow (٢)$$

$$س_{١} ، س_{٢} ، ع_{١} ، ع_{٢} \geq صفر$$

وذلك علي أساس أن معاملات كل من $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ هي صفر في دالة الهدف نظرا لأنها لا تؤدي إلي تحقيق أية أرباح . كما أن معامل $ع_{١}$ في القيد (٢) هو صفر ، ومعامل $ع_{٢}$ في القيد (١) هو صفر نظرا لعدم وجودهم أصلا في تلك القيود .

الخطوة الثانية : اختيار حلا مبدئيا ووضع جدول السمبلكس الأولي :

تقوم طريقة السمبلكس علي البدء بحلا مبدئيا Initial Solution وتحديد ربحه ، ثم محاولة تحسين هذا الحل إن أمكن . ولذلك يجب البدء بحلا مبدئيا لتلك المعادلات معا . وبالطبع سوف يكون هذا الحل هو نقطة ركنية في المنطقة الممكنة . فمعني أن هذا الحل يقع في نقطة ركنية أنه يحقق كل القيود معا ـ ومن الناحية النظرية يمكن اختيار أية نقطة ركنية ، ففي كلا الحالات سوف نصل إلي الحل الأمثل .

وبتأمل مشكل البرمجة الخطية ، فإننا نجد أن القيود ما هي إلا مجموعة من المعادلات ، وعدد المجاهيل بها في الغالب يكون أكثر من عدد المعادلات. ففي مثالنا هذا نجد أن عدد المتغيرات (المجاهيل) هو أربعة ـ بما فيها متغيرات العطل ع$_1$ ، ع$_2$ ـ بينما عدد المعادلات (القيود) هو اثنين فقط ، ومن الحقائق الرياضية أنه إذا كان عدد المجاهيل أكبر من عدد المعادلات فإن مجموعة المعادلات معا سوف يكون لها أكثر من حل. ويطلق عليها مجموعة الحلول Solution set . ويتكون الحل الواحد من قيم للمتغيرات الأربعة وذلك بشرط أن يكون دائما عدد المتغيرات التي تأخذ قيمة الصفر هو معادلا لـ (عدد المتغيرات – عدد القيود) . ومعني ذلك أن عدد المتغيرات التي لها قيمة غير صفرية ، والتي يطلق عليها المتغيرات الأساسية Basic Variables أو المتغيرات التي يمكن الحل لها ، يعادل عدد القيود الموجودة وفي مثالنا الحالي يكون عدد المتغيرات الأساسية في الحل هو

اثنين فقط . أما المتغيرات التي تأخذ قيما صفرية في الحل فهي ما تعرف بالمتغيرات الغير أساسية Nonbasic Variables والتي يبلغ عددها في المثال اثنين ، وهو عبارة عن عدد المتغيرات مطروحا منه عدد القيود .

وبالرجوع إلي القاعدة العامة في حل المعادلات معا ، وهي محاولة eliminate إزالة أحد المتغيرات من المعادلات عن طريق ضرب أحد المعادلات في رقم وطرحها من باقي المعادلات ، وباستخدام أيضا قواعد جبر المصفوفات ، أمكن التوصل إلي طريقة لحل مجموعة من المعادلات معا عن طريق ما عرف بطريقة ازالة المتغيرات من المعادلات علي مراحل Successive elimination والمبسطة عن طريق أسلوب Gauss - Jordan method .

وتوضح الطريقة المشار إليها أن المتغيرات الأساسية سوف تظهر في مصفوفة الحل النهائي في شكل ما يسمي بمصفوفة الوحدة والتي تدل علي أن المتغيرات الخاصة بتلك الأعمدة الموجودة في مصفوفة الوحدة هي متغيرات مستقلة Linearly Independent ولذلك تعتبر متغيرات أساسية في الحل .

وإذا رجعنا إلي مثالنا نجد أن بيانات المعادلات (القيود) يمكن وضعها في مصفوفة يطلق عليها مصفوفة المعاملات تأخذ الشكل التالي :

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} & ١ & ٤ & ٥ \\ ١ & \text{صفر} & ٤ & ٢ \end{bmatrix}$$

ويظهر في هذه المصفوفة أن العمودين الثالث والرابع هما مصفوفة الوحدة Unit Matrix . ويعني ذلك مباشرة أن $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ يمكن اعتبارهما متغيران أساسيان في حل السمبلكس المبدئى . وهذا يعني أن $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ لهما قيم غير صفرية بينما باقي المتغيرات $س_{٢}$ ، $س_{١}$ لهما قيم صفرية . وبالنظر إلي المعادلات وافتراض أن كل من $س_{١}$ ، $س_{٢}$ = صفر نجد أن $ع_{١}$ = ١٢٠ ، $ع_{٢}$ = ٦٠. وبالتالي فإن الحل المبدئى هو :

$$\left.\begin{array}{l} س_{١} = \text{صفر} \\ \\ س_{٢} = \text{صفر} \end{array}\right\} \quad \text{متغيرات غير أساسية}$$

$$\left.\begin{array}{l} ع_{١} = ١٢٠ \\ \\ ع_{٢} = ٦٠ \end{array}\right\} \quad \text{متغيرات أساسية}$$

ويجب هنا أن نعرف أنه لحسن الحظ بمجرد إضافة متغيرات العطل إلي المتباينات في حالة القيود ذات الإشارة ≥ فإن المعادلة سوف تضمن وجود متغيرات أساسية (في مصفوفة الوحدة) يمكن استخدامها في الوصول إلي الحل المبدئى . والآن يمكننا وضع هذه المعلومات فيما يسمي بجدول السمبلكس الأولي الموضح في الشكل التالي والذي يلاحظ عليه ما يلي :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$
صفر	ع$_1$	١٢٠	٥	٤	١	صفر
صفر	ع$_2$	٦٠	٢	٤	صفر	١
ل		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ح ـ ل			١٠	٩	صفر	صفر

١ ـ يتكون الجدول من جزء علي اليمين يتضمن معلومات عن المتغيرات الأساسية وجزءاً آخر علي اليسار يتكون من مصفوفة تعبر عن تفريغ لمعادلات القيود ودالة الهدف .

٢ ـ يبدأ الجدول بتفريغ للمتغيرات الأساسية التي توصلنا إليها في الحل المبدئى وهما ع$_1$ ، ع$_2$ في هذا المثال . ثم يوضع علي يمين كل منها ربح الوحدة .وهو مجرد معامل الربح لكل من ع$_1$ ، ع$_2$ في دالة الهدف ـ أما علي يسارها فيتم وضع قيم تلك المتغيرات في الحل المبدئي Initial Solution ، وهي ع$_1$ = ١٢٠، ع$_2$ = ٦٠ تكون قيمة كل من س$_1$ ، س$_2$ مساوية للصفر نظرا لأنها متغيرات غير أساسية عند هذه المرحلة .

وعمليا يعني هذا الحل عدم انتاج كل من $س_١$ ، $س_٢$ ، ولذلك فإن كل المادة الخام غير مستخدمة وكل الطاقة تعد معطلة، فكل من $ع_١$ ، $ع_٢$ تأخذ حدها الأقصي .

٣ ـ الجانب الأيسر من الجدول به أربعة أعمدة ، كل منها يمثل أحد المتغيرات . ولذلك نبدأ بتفريغ دالة الهدف في الصف ح ، ثم تفرغ القيود في الصفين الخاصين بالمتغيرين $ع_١$ ، $ع_٢$ فالصف الأول ما هو إلا معلومات القيد الأول التي تعبر عن قيد الأخشاب المتاحة ، أما الصف الثاني فهو عبارة عن قيد ساعات العمل المتاحة .

وبتأمل مصفوفة المعاملات نجد أن مصفوفة الوحدة تعبر عن المتغيرين $ع_١$ ، $ع_٢$. ولذلك فإن المتغير الأساسي الذي يظهر في الجانب الأيمن من جدول السمبلكس المبدئى يتقاطع الصف الخاص به مع العمود الخاص بنفس المتغير عند القيمة واحد ، وتكون جميع القيم في ذات العمود معادلة للصفر . فالصف الخاص بالمتغير $ع_١$ يتقاطع مع عمود $ع_١$ عند الواحد الصحيح بينما تقاطع الصف الثاني مع صف $ع_١$ هو صفر . وذلك يعد صحيحا أيضا بالنسبة للمتغير $ع_٢$.

٤ ـ الصفين الأخير وقبل الأخير يعبران عن بعض العمليات الحسابية اللازمة الواجب القيام بها حتي يمكن القيام بالخطوة التالية ،

وهي اختبار مثالية الحل . أما الصف قبل الأخير والذي أطلق عليه ل فهو ناتج من عملية حسابية بسيطة هي ضرب ربح الوحدة من المتغيرات الأساسية في الأرقام المناظرة في مصفوفة المعاملات لكل عمود وجمعها ، ومثال ذلك الخانة الموجودة في الصف ل في عمود قيم المتغيرات الأساسية محسوبة كالآتي :

صفر × ١٢٠ + صفر × ٦٠ = صفر

ويمكن التوصل إلي نفس النتيجة باستخدام جبر المصفوفات

$$\begin{bmatrix} \text{صفر} \\ \text{صفر} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} ١٢٠ & ٦٠ \end{bmatrix} = \text{صفر}$$

وكذلك فإن الخانة الثانية في الصف ل محسوبة كالآتي :

صفر × ٥ + صفر × ٢ = صفر

وباقي الخانات محسوبة كالآتي :

صفر × ٤ + صفر × ٤ = صفر

صفر × ١ + صفر × صفر = صفر

صفر × صفر + صفر × ١ = صفر

وبتأمل هذه الأرقام نجد أن الخانة الأولي تعبر عن ربح الحل . فعدم انتاج $س_١$ ، $س_٢$ سوف يجعل $ع_١$ ، $ع_٢$ أقصي ما يمكن والربح

المحقق منهم هو الصفر = صفر × ١٠ + صفر × ٩ + ١٢٠ × صفر + ٦٠ × صفر .

٥ ـ الصف الآخير في الجدول هو ناتج عن طرح القيمة الموجودة في الصف ل من ربح الوحدة لكل عمود والموجودة في أعلي الجدول . فالخانة الأولي هي (١٠ - صفر) والثانية هي (٩ - صفر) وهكذا . وبصفة عامة نجد أن القيم الخاصة بالمتغيرات الأساسية في هذا الصف قيما صفرية . ويرجع ذلك إلي أن أعمدة هذه المتغيرات هي التي تكون مصفوفة الوحدة وبالتالي فالعمود به قيمة واحدة مرة واحدة وباقي القيم صفر ، ونظرا لأن هذا الواحد موجود في صف نفس المتغير فإن ح = ل دائما لكل عمود من تلك الأعمدة .

الخطوة الثالثة : اختيار مثالية الحل :

ويتم في هذه الخطوة القيام باختبار بسيط يتم منه معرفة ما إذا كنا قد وصلنا إلي الحل الأمثل أم لا . وقبل ذكر هذا الاختيار يجب أن نتفهم أولا معني الصفين الأخيرين في جدول السمبلكس المبدئى . بالنظر إلي كيفية حساب الصف قبل الآخير نجد أنه يعبر عن الربح الذي سوف تتم التضحية به مقابل زيادة الوحدة من المتغير الموجود في كل عمود .

فبالنسبة للعمود الأول والخاص بالمتغير $س_١$ نجد أن رقم ٥ يعبر عن عدد الوحدات التي سوف تنقص بها $ع_١$ (الأخشاب غير

المستخدمة) عند انتاج وحدة واحدة من $س_١$. كذلك فإن رقم ٢ في ذات العمود يعبر عن عدد الوحدات التي سوف تنقص بها $ع_٢$ (الطاقة المعطلة) عند انتاج وحدة واحدة من $س_١$. وطالما أن ربح الوحدة من $ع_١$ (الأخشاب غير المستخدمة) ، $ع_٢$ (الطاقة العاطلة) هو صفر ، فإن مقدار الربح الذي يتم التضحية به في حالة انتاج وحدة من $س_١$ هو صفر × ٥ + صفر × ٢ = صفر . وهو ذات الرقم الموجود في الخانة الثانية من الصف قبل الآخير. كذلك يمكن بيان أن الربح الذي سوف يتم التضحية به نتيجة لإنتاج وحدة واحدة من السلعة الثانية $س_٢$ هو صفر × ٤ + صفر × ٤ = صفر وهكذا .

والآن يمكننا تفهم معني الصف الآخير ح – ل . فقيم ح هي الربح المتوقــع من انتاج وحدة واحدة من $س_١$ ، $س_٢$. وعلي ذلك فإن ح – ل بالنسبة للعمود الأول $س_١$ تعني الفارق بين الربح الذي سوف يتحقق والربح الذي سوف يتم التضحية به عند انتاج وحدة واحدة من السلعة $س_١$. وهو في هذه الحالة رقما موجبا قدره عشرة جنيهات، ويطلق عليه الأثر الصافي (ح–ل) المترتب علي زيادة انتاج وحدة من السلعة الأولي .وكذلك فإن الفارق بين لربح الذي سوف يتحقق والربح الذي سوف تتم التضحية به عند انتاج وحدة واحدة من السلعة $س_٢$ هو تسعة جنيهات ويطلق عليه الأثر الصافي المترتب علي زيادة انتاج وحدة من السلعة الثانية . ولذلك يمكننا الآن ذكر القاعدة التي هي محور الاختبار الذي يستخدم في هذه الحالة :

في حالة تعظيم الربح :

إذا كانت كل القيم الموجودة في الصف الآخير ح - ل هي قيما صفرية أو سالبة فإن الحل الموجود يكون هو الحل الأمـــثل Optimal Solution ، أما إذا كانت واحدة أو أكثر من تلك القيم ذات قيمة موجبة فإن الحل لا يعد حلا أمثل .

في حالة تقليل التكاليف :

إذا كانت كل القيم الموجودة في الصف الأخير ح - ل هي قيما صفرية أو موجبة فإن الحل الموجود يكون هو الحل الأمثل ، أما إذا كانت واحدة أو أكثر من تلك القيم ذات قيم سالبة فإن الحل لا يعد حلا أمثل .

ويتطبيق هذه القاعدة علي المثال الحالي نجد أن هناك قيما موجبة في الصف الأخير ، ويعني ذلك أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل ، ومعني ذلك أن أى تغيير في قيم كل من $س_١$ ، $س_٢$ يترتب عليه زيادة الأرباح ، ولذلك فإن الخطوة التالية هي البحث عن حلا أفضل .

الخطوة الرابعة : البحث عن حلا أفضل :

الحـــل الحـــالي الذي بين أيدينا هو $س_١$ = صفر، $س_٢$ = صفر ، $ع_١$ = ١٢٠ ، $ع_٢$ = ٦٠ ، وطالما أننا قد توصلنا في الخطوة السابقة

إلي ضرورة البحث عن حلا أفضل فإننا سوف نغير الحل الموجود أمامنا الآن . وطالما أن عدد المعادلات كما هو اثنين فإن عدد المتغيرات الأساسية ذات القيم سوف يظل دائما اثنين .. وبناء علي ذلك فإننا إذا حاولنا إدخال متغيرا غير أساسي Non-basic Variable في الحل ليصبح متغيرا أساسيا فإن أحد المتغيرات الأساسية يجب أن يصبح متغيرا غير أساسيا قيمته صفر ونطلق عليه .أنه المتغير الذي يترك الحل وعلى ذلك إن تعديل الحل لحالي يتطلب القيام بالخطوات الثلاث التالية :

أولا : تحديد المتغير الذي يدخل الحل .. بمقارنة القيم الموجودة في الصف الأخير في صف السمبلكس المبدئي بعضها ببعض نجد أن المتغير س$_{١}$ في العمود الأول يحظي بأكبر القيم .ويعني ذلك أن إدخال السلعة س$_{١}$ في الحل سوف يترتب عليه تحقيق أرباح أعلي مما لو تم إدخال المتغير س$_{٢}$ ولذلك فالقرار الآن هو اعتبار س$_{١}$ متغيرا أساسيا في الحل له قيمة بعد أن كان متغيرا غير أساسيا قيمته صفر . (ويتم التعبير عن ذلك بالسهم الذي يشير إلي أعلي في أسفل عمود المتغير س$_{١}$).

ثانيا : تحديد المتغير الذي سوف يترك الحل .. طالما أن المراد هو انتاج س$_{١}$ فإننا سوف نحاول تحديد أقصي رقم ممكن انتاجه من س$_{١}$ بفرض أنها هي الوحيدة ـ مع ع$_{٢}$ ـ الموجودة في الحل . بتأمل الصف الأول نجد أن أقصي قيمة يمكن انتاجها من س$_{١}$ حسب قيد الأخشاب هي ١٢٠ ÷ ٥ = ٢٤ وحدة . كذلك فإن الصف الثاني يوضح أن

أقصي قيمة يمكن انتاجها من $س_2$ حسب قيد الطاقة هي ٦٠ ÷ ٢ = ٣٠ وحدة ، وذلك علي أساس أن ٥ ، ٢ في عمود $س_1$ هي عدد الوحدات من الأخشاب والطاقة اللازمة لانتاج وحدة واحدة من $س_1$.

وطالما أن الحد الأقصي الممكن انتاجه عمليا يجب أن يحقق كلا من قيود الأخشاب والطاقة معا فإن أقصي قيمة للمتغير $س_1$ هي أقل القيمتين المحسوبتين فيما سبق ، وهما ٢٤ ، ٣٠ . أي أن القيمة هي ٢٤ والتي جاءت من عملية القسمة الأولي . ويعني ذلك أن كمية الأخشاب الغير مستخدمة سوف تستخدم بالكامل لإنتاج ٢٤ وحدة (٢٤ × ٥ = ١٢٠) . ويعني ذلك رياضيا أن $ع_1$ (الكمية غير المستخدمة) سوف تصبح صفرا ، أي تصبح متغيرا غير أساسيا ، أي تترك الحل .

وحتي نضع ذلك في شكل خطوة محددة نقول :

« اقسم قيم المتغيرات الأساسية في كل صف علي المعاملات المناظرة الموجبة الموجودة في عمود المتغير الذي سوف يترك الحل - المتغير الموجود في الصف ذو ناتج القسمة الأقل يكون هو المتغيرالذي يترك الحل - » .

وتطبيق ذلك اجرائيا هو :

صف $ع_2$ ٦٠ ÷ ٢ = ٣٠

صف $ع_1$ ١٢٠ ÷ ٥ = ٢٤

∴ $ع_1$ تترك الحل .

(ويتم التعبير عن ذلك بالسهم الأفقي الذي يشير إلي اليسار في صف المتغير ع$_{١}$) .

ثالثا : عمل جدول السمبلكس التالي ... يوجد بالحل الجديد متغيرين أساسين هما س$_{١}$ ، ع$_{٢}$ (التي لم تتغير) ومتغيرين غير أساسين هما س$_{٢}$ ، ع$_{١}$ (التي خرجت من الحل) . ولذلك نقوم بتعديل ذلك في جدول السمبلكس كما يلي :

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
١٠	س$_{١}$					
صفر	ع$_{٢}$					
ل						
ح ـ ل						

وحتي نقوم بملأ بقية الخانات في الصفين الأول والثاني يجب أن نعرف الآن ما يسمي بالصف المحور Pivot row وهو الصف الموجود في جدول السمبلكس السابق (المبدئى في هذه الحالة) الخاص بالمتغير الذي سوف يترك الحل . وفي هذه الحالة هو الصف الأول ، صف المتغير ع$_{١}$. وكذلك العمود المحور Pivot column في ذات الجدول

وهو العمود الخاص بالمتغير الذي سوف يدخل الحل . وهو عمود المتغير س$_1$. ومن هـذا التحديد يمكن أن نعرف ما يسمي بالرقم المحور وهو الرقم الذي يقع في تقاطع الصف المحور والعمود المحور في جدول السمبلكس السابق (المبدئى في هذه الحالة) . وفي مثالنا الحالي يكون الرقم هو (٥) .

ولتحديد القيم الواجب وضعها في جدول السمبلكس الجديد في الصف المناظر للصف المحور ، أى الصف الأول الخاص بالمتغير س$_1$ ، فإن كل القيم المناظرة في الصف المحور في الجدول القديم يتم قسمتها علي الرقم المحور . وسوف يضمن ذلك أن القيمة المناظرة للرقم المحور في الجدول القديم سوف يصبح قيمتها واحد في الجدول الجديد . وهذا هو بداية تكوين مصفوفة الوحدة في الجدول الجديد . ويوضح الجدول الجزئى التالي تلك القيم الجديدة في الصف الأول من الجدول الجديد .

المتغيرات الأساسية	القيم	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$
س$_1$	٢٤	١	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	صفر

ويجب ألا يغيب عن بالنا أن هذه أصلا معادلة وأن قسمة طرفي المعادلة علي رقم ثابت لا يؤثر إطلاقا علي علاقاتها الرياضية أو تأثيرها كقيد في مشكلة البرمجة الخطية .

ولتحديد القيم الواجب وضعها في جدول السمبلكس الجديد في الصفوف الأخري ـ غير الصف المناظر مع الدمج للصف المحور ـ نقوم

بعمل بعض الخطوات الحسابية التي تهدف إلي استكمال مصفوفة الوحدة في جدول السمبلكس الجديد وذلك باستخدام الصف الجديد في الجدول في إزالة بعض المتغيرات من باقي الصفوف التي سوف يتم نقلها .

وتطبيق ذلك إجرائيا يمكن أن يتم عن طريق العمليات الحسابية التالية :

[القيم الموجودة في الصف المراد نقله إلي الجدول الجديد] — [القيم الموجودة في الصف الخاص بالمتغير الجديد الأساسي في الجدول الجديد] × [الرقم الخاص بالصف في العمود المحور] = القيم في الصف الجديد

وبتطبيق ذلك علي صف المتغير $ع_{٢}$ تحسب القيم الجديدة في الجدول الجديد علي النحو التالي :

$٦٠ - (٢٤) \times ٢ = ١٢$

$٢ - (١) \times ٢ = $ صفر

$٤ - (\frac{٤}{٥}) \times ٢ = \frac{١٢}{٥}$

صفر $- (\frac{١}{٥}) \times ٢ = -\frac{٢}{٥}$

صفر $- (\frac{١}{٥}) \times ٢ = -\frac{٢}{٥}$

ويوضح هذ المعلومات ، بالإضافة إلي معلومات صف المتغير $س_{١}$ في الجدول نصل إلي الجدول التالي

جدول السمبلكس رقم (٢)

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س$_1$	س$_2$	ع$_1$	ع$_2$
١٠	س$_1$	٢٤	١	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{١}{٥}$	صفر
صفر	ع$_2$	١٢	صفر	$\frac{١٢}{٥}$	$-\frac{٢}{٥}$	١
ل		٢٤٠	١٠	٨	٢	صفر
ح ـ ل			صفر	١	٢-	صفر

ويتم أيضا استكمال الصفين ل ، ح - ل كما فعلنا في الجدول السابق . ومن هذا الجدول يتضح أن الحل هو :

س$_1$ = ٢٤
ع$_1$ = ١٢
متغيرات أساسية

ع$_1$ = صفر
س$_2$ = صفر
متغيرات غير أساسية

وأن ربح الحل هو ٢٤٠ = ١٠ × ٢٤ + صفر × ١٢ والذي يظهر في الخانة الأولي من الصف ل ، والذي هو أكثر من ربح الحل السابق . ويعني ذلك أن الحل الجديد هو أفضل من الحل السابق عليه.

ويهمنا هنا قبل الانتقال إلي الخطوة الرابعة أن نوضح المعني وراء بعض الأرقام الواردة في جدول السمبلكس الثاني ، ففي المشكلة الأصلية حسب جدول السمبلكس المبدئى كان انتاج وحدة من السلعة $س_1$ يستلزم ٥ وحدات من الأخشاب ، ووجدتين من الطاقة . وكانت هذه القيم هي القيم الواردة في عمود المتغير $س_1$ ، أما الآن في جدول السمبلكس الثاني فإن معاملات $س_1$ في العمود الأول هي ١ ، صفر . كذلك فإن معاملات المتغير $س_2$ في الجدول الأول كانت ٤ ، ٤ أما الآن فهي ٤/٥ ، ١٢/٥ . فهل ذلك يعني عدم صحة الشرح الذى تم مسبقا للمنطق وراء العمليات الحسابية ؟ الإجابة هي النفي القاطع ولنري الآن لماذا .

إن القيمة ٥ الواردة في الجدول الأول يمكن أن يطلق عليها معدل الإحلال الحدي بين المتغير $س_1$ ، $ع_1$ فانتاج وحدة من $س_1$ يعني تخفيض $ع_1$ بخمسة وحدات كما ذكرنا من قبل. كذلك فإن القيمة ٢ الواردة في الجدول الأول هي معدل الإحلال الحدي Marginal rate of substituation بين المتغير $س_1$ ، $ع_2$. فانتاج وحدة من $س_1$ يعني تخفيض $ع_2$ بوحدتين . وبتطبيق نفس المفهوم في الجدول الثاني نجد أن تغيير المتغيرات الأساسية يقضي تغيير معدلات الإحلال. وهو ما حدث فعلا فالقيمة الموجودة في عمود $س_1$ تعبر عن أن معدل الأحلال الحدي بين $س_1$ ، $س_1$ هو واحد وذلك أمر منطقيا . فنظرا لأننا في هذه المرحلة ننتج أقصي عدد ممكن من السلعة $س_1$ (حسب القيدين معا) فإن زيادة إنتاج السلعة $س_1$ بوحدة لابد أن يكون عن طريق التضحية بوحدة من

الوحدات التي تم انتاجها من $س_{١}$. فوحدة من $س_{١}$ تعادل وحدة واحدة من $س_{١}$ لا أكثر ولا أقل . كذلك فإن القيمة صفر في الصف $ع_{٢}$ تعني أنه في هذه المرحلة لا يمكن زيادة انتاج $س_{١}$ باستخدام وحدات اضافية من $ع_{٢}$. ويرجع ذلك قطعا إلي أن رقم ٢٤ الوارد في الحل هو أقصي رقم يمكن انتاجه من $س_{١}$ حسب القيدين معا .

ونستطيع الآن شرح معني $\frac{٤}{٥}$ الواردة في عمود $س_{٢}$ صف $س_{١}$. فحيث أن انتاج ٢٤ وحدة من $س_{١}$ سوف يستلزم كل المـــادة الخـــام (٢٤ × ٥ = ١٢٠) فإن أي إنتاج للسلعة $س_{٢}$ سوف يكون علي حساب السلعة $س_{١}$. ومعني $\frac{٤}{٥}$ هو أن إنتاج وحدة واحدة من السلعة $س_{٢}$ يعني التضحية بـ $\frac{٤}{٥}$ وحدة من $س_{١}$ والسبب في ذلك هو أن البيانات في هذه المرحلة توضح أن المادة الخام (الأخشاب) هي القيد المحدد Critical constraint نظرا لعدم وجود أخشاب غير مستخدمة ($ع_{١}$ = صفر) . وبيانات القيد الأول تنص علي أن وحدة من $س_{١}$ تستلزم ٥ وحدات من الأخشاب وأن وحدة من $س_{٢}$ تستلزم ٤ وحدات من الأخشاب . وعلي ذلك ، فإن التضحية بأربعة وحدات من الأخشاب لانتاج وحدة واحدة من $س_{٢}$ يقتضي التضحية بما يعادل $\frac{٤}{٥}$ وحدة من السلعة $س_{١}$.

ماذا عن المعامل $\frac{١٢}{٥}$ الوارد في العمود $س_{٢}$ ؟ أنه أيضا عدد الوحدات الواجب التضحية بها من $ع_{٢}$ لانتاج كما أوضحنا مسبقا $\frac{٤}{٥}$

وحدة من $س_١$. ويعني ذلك توفير ساعات عمل قدرها $\frac{٤}{٥}$ × ٤ = $\frac{٨}{٥}$ ساعة نظرا لأن الوحدة الواحدة تستلزم أربعة ساعات كاملة . ونظرا لأن انتاج وحدة من $س_٢$ يستلزم أيضا ٤ ساعات كاملة فإن الأثر النهائى لانتاج وحدة من $س_٢$ علي $ع_٢$ هو التضحية بـ (٤ - $\frac{٨}{٥}$) = $\frac{١٢}{٥}$ ساعة .

وبنفس المنطق فإن زيادة الخشب غير المستخدم $ع_١$ بوحدة سوف يترتب عليه تخفيض المنتج من $س_١$ بخمس وحدة حيث أن الوحدة يلزمها خمسة وحدات خشب . أما زيادة $ع_١$ بوحدة فسوف تستلزم تخفيض انتاج $س_١$ بخمس وحدة وذلك يتسبب في زيادة $ع_٢$ (الوقت غير المستخدم) بما يعادل $\frac{١}{٥}$ × ٢ = $\frac{٢}{٥}$ نظرا لأن الوحدة من $س_١$ تستلزم وحدتين من $ع_٢$. ويجب هنا أن نلاحظ أن الإشارة السالبة للقيمة $\frac{٢}{٥}$ تعني أن زيادة $ع_١$ في هذه المرحلة سوف يترتب عليها زيادة $ع_٢$ بينما أن الإشارة الموجبة في المعامل تعني النقص في المتغير الموجود في الصف . والقاعدة هنا أنه إذا كنت إشارة معامل الإحلال موجبة فيعني ذلك أن العلاقة بين المتغير الموجود في الصف والمتغير الموجود في العمود علاقة عكسية أما إذا كانت الإشارة سالبة فيعني ذلك أن العلاقة بينهما علاقة طردية .

رابعا : **اختبار مثالية الحل** .. بتأمل القيم الواردة في الصف الأخير من جدول السمبلكس رقم (٢) يتضح أن به رقما موجبا ويعني ذلك أن الحل الموجود ليس هو الحل الأمثل . ولذلك نقوم بتكرار نفس الخطوات السابقة والتي تقوم علي الاجراءات التالية :

١ ـ ادخال المتغير س$_{٢}$ في الحل .

٢ ـ لتحديد المتغير الذي يترك الحل نقوم بالآتي :

٢٤ ÷ $\frac{٤}{٥}$ = ٣٠ وحدة

١٢ ÷ $\frac{١٢}{٥}$ = ٥ وحدة

ع$_{٢}$ يجب أن يترك الحل

وبناء علي ذلك فإن عمود س$_{٢}$ هو العمود المحور ، صف ع$_{٢}$ هو الصف المحور ، $\frac{١٢}{٥}$ هو الرقم المحور .

٣ ـ يتم نقل الصف ع$_{٢}$ أولا إلي الجدول الجديد وذلك بقسمة كل القيم علي الرقم المحور ووضعها في الصف المناظر س$_{٢}$.

جدول السمبلكس رقم (٣)

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
١٠	س$_{١}$	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س$_{٢}$	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح ـ ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

أما قيم الصف س$_{١}$ في الجدول الثالث فتم تحديدها علي النحوالتالي :

$$(٢٤) - (٥) \times (\frac{٤}{٥}) = ٢٠$$

$$(١) - (\text{صفر}) \times (\frac{٤}{٥}) = ١$$

$$(\frac{٤}{٥}) - (١) \times (\frac{٤}{٥}) = \text{صفر}$$

$$(\frac{١}{٥}) - = (\frac{٢}{١٢}-) \times (\frac{٤}{٥}) = \frac{٥}{١٥} = \frac{١}{٣}$$

$$(\text{صفر}) - (\frac{٥}{١٢}) \times (\frac{٤}{٥}) = - \frac{١٤}{١٢} = - \frac{١}{٣}$$

ويتضح من الجدول الثالث أن الحل هو :

س$_{١}$ = ٢٠
س$_{٢}$ = ٥
متغيرات أساسية

ع$_{١}$ = صفر
ع$_{٢}$ = صفر
متغيرات غير أساسية

وأن ربح الحل هو ٢٤٥ .

وحيث أن كل القيم في الصف الأخير صفرية أو سالبة ، فإن ذلك يعني أن هذا الحل هو الحل الأمثل والذي يقضي بأن تقوم الشركة بانتاج عشرون مكتبا وخمسة مقاعد فقط . وذلك يحقق أقصي ربح ممكن وهو ٢٤٥ جنيها .

أسعار الظل :

حتي نتفهم أكثر معني باقي القيم الموجودة في الصف الأخير في جدول الحل الأمثل دعنا نأخذ جزءا من الجدول كما يلى :

جدول سبملكس جزئي

ربح الوحدة ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$
١٠	$س_١$	٢٠			$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$
٩	$س_٢$	٥			$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥			$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح ـ ل			صفر	صفر	$\frac{-١١}{٦}$	$\frac{-٥}{١٢}$

ويتضح منه أن المتغيرات الأساسية $س_١$، $س_٢$ يكون معاملها صفر في الصف ح – ل كما أنه محاولة زيادة $ع_١$ بوحدة واحدة سوف يترتب عليها تخفيض الربح الإجمالي بما يعادل $\frac{١١}{٦}$ جنية وزيادة $ع_٢$ بوحدة واحدة سوف يترتب عليه تخفيض الربح الإجمالي بما يعادل $\frac{٥}{١٢}$ جنيه . ويمكن إثبات ذلك بمحاولة تتبع أثر زيادة $ع_١$ بوحدة واحدة . فحسب المعاملات الموجودة في العمود $ع_١$ سوف يترتب علي ذلك تخفيض $س_١$ بمقدار ثلث وحدة وزيادة $س_٢$ بمقدار $\frac{١}{٦}$ وحدة

ويعني ذلك أن

$$س_١ = ٢٠ - \frac{١}{٣} = ١٩\frac{٢}{٣}$$

$$س_٢ = ٥ - \frac{١}{٦} = ٥\frac{١}{٦}$$

ويكون الربح من $س_١ = ١٩\frac{٢}{٣} \times ١٠ = ١٩٦\frac{٤}{٦}$

والربح من $س_٢ = ٥\frac{١}{٦} \times ٩ = ٤٦\frac{٣}{٦}$

ومجموع الربح الجديد هو $٢٣٤\frac{١}{٦}$

والذى هو أقل من الربح الأمثل بمقدار $\frac{١١}{٦}$

وعن طريق تتبع أثر زيادة $ع_٢$ بوحدة واحدة يمكن أيضاً بيان أن الأثر هو تخفيض الربح الأجمالي بمقدار $\frac{٥}{١٢}$ جنيـه .

ويجب الإشارة هنا إلي أنه يمكن استخدام بيانات الصف الأخير لمعرفة أثر تخفيض (وليس زيادة)كل من $ع_١$ ، $ع_٢$ علي الربح الأمثل. فبنفس المنطق سوف نجد أن تخفيض $ع_١$ بمقدار وحدة واحدة (لاحظ ن ذلك يعني زيادة المستخدم من الأخشاب بوحدة واحدة (سوف يرفع الأرباح المحققة بما قدره $\frac{١١}{٦}$ ، كما أن تخفيض ع٢ بمقدار وحدة واحدة (لاحظ أن ذلك يعني زيادة المستخدم من الطاقة بوحدة واحدة) سوف يرفع الأرباح المحققة بما قدره $\frac{٥}{١٢}$ جنيه . والترجمة الاقتصادية لذلك هو أن المنشأة سوف تكون مستعدة أن تزيد المتاح من الأخشاب بوحدة واحدة طالما أن ثمن الوحدة المعروض لا يزيد علي الزيادة المتوقعة فى الربح نتيجة زيادة الأخشاب بوحدة . ولذلك يطلق علي $\frac{١١}{٦}$

الموجودة في الصف الأخير لفظ سعر الظل Shadow Price لعنصر الأخشاب أي أنه أقصي سعر يمكن أن يدفع في وحدة اضافية من الأخشاب . حيث أن الربح المحقق من ذلك لا يزيد عن $\frac{11}{6}$.

وبنفس المنطق تعد $\frac{5}{12}$ هي أقصى ثمن ممكن أن يدفع لوحدة واحدة من الطاقة ، نظراً لأن إضافة وحدة واحدة سوف لا يزيد الربح بمقدار أعلي من $\frac{5}{12}$ جنيه .ولذلك يطلق عليها الظل Shadow Price لعنصر ساعات العمل .

وعن طريق مقارنه أسعار الظل لكل من الأخشاب وساعات التشغيل يمكن تحديد أولويات الإنفاق . فمن الواضح أن زيادة المتاح من الأخشاب عند هذه المرحلة هو الذي يرفع من الربح بقدر أعلي من زيادة ساعات العمل . ويوضح ذلك لمتخذي القرار أن عملية زيادة المخصص لجميع الموارد في الميزانية بنفس النسبة قرار قد لا يكون فى جميع الحالات هو الأمثل .

ولأسعار الظل استخداماً آخر في حالة تخفيض الميزانيات والموارد . ففي مثالنا هذا إذا كان هناك ضغطاً في الميزانية يقتضي تقليل المادة الخام أو العمالة (يعنى ذلك زيادة $ع_1$ ،$ع_2$) فإن الأرقام فى الصف الأخير تقتضى أن يتم تخفيض العمالة (ساعات العمل) أولاً لأن التخفيض بوحدة سوف يقلل الربح بمقدار $\frac{5}{12}$ فقط . أما تخفيض المادة الخام بوحدة فسوف يترتب عليه تقليل الأرباح بمقدار $\frac{11}{6}$ جنيه

وهناك قاعدتين هامتين يجب أخذهما فى الحسبان بالنسبة لقيم أسعار الظل :

١ ـ إذا كان متغير العطل ع ضمن المتغيرات الأساسية فى الحل في الجدول النهائى فإن سعر الظل لهذا المتغير لابد وأن يكون صفراً . ويرجع ذلك إلي أن وجود قيمة موجبة للمتغير ع تدل علي وجود فائض Slack من هذا المورد . وبالتالى ليس هناك داعى لشراء أية وحدة إضافية منه فى هذه المرحلة . ويعني ذلك أن قيمة الوحدة الإضافية للمنشأة هى صفر .

٢ - عندما يكون متيغر العطل ع ضمن المتغيرات الغير أساسية في الحل في الجدول النهائى فإن قيمته تساوي صفر وسعر الظل له يكون رقماً موجباً معبراً عنه برقماً سالباً مساويا له فى الصف الأخير . ويرجع ذلك إلى أنه قد تم استخدام هذا العنصر تماماً وأصبح هو العامل الحاكم في رقم الإنتاج وأى زيادة فيه يترتب عليها زيادة الإنتاج وتحقيق أرباح أعلى .

حالات أخرى لأسلوب السمبلكس

في الجزد السابق عرضنا لاستخدام أسلوب السمبلكس في حالة تعظيم الربح وعندما تكون القيود جميعها في صورة ≥ وسوف نعرض فى هذا الجزء الحالات الأخري العديدة التى يمكن معها استخدام نفس الأسلوب مع تعديل طفيف .

أولاً : حالة تقليل التكاليف :

هناك العديد من المشروعات التي لا تتحكم فى أسعار بيع المنتجات ، كما أن هناك العديد من المنشآت التي تقوم بتقديم خدمات لا تهدف من وراءها إلي تحقيق الأرباح ، وفى مثل هذه الحالات يكون الهدف هو تقليل التكاليف إلي أقل حد ممكن .

فبافتراض أن دالة الهدف هى :

قلل ت = ٢س$_{١}$ + ٣س$_{٢}$

حيث أن ت هى إجمالي تكاليف إنتاج من السلعيتن المراد تقليلها إلي أقل حد ممكن . والجزء الأول من الطرف الأيسر يعبر عن إجمالى تكلفة إنتاج س$_{١}$ من السلعة الأولى عندما تكون تكلفة إنتاج الوحدة من السلعة الأولى هى ٢ جنيه . كما أن ٣س$_{٢}$ هي أجمالى تكلفة س$_{٢}$ من السلعة الثانية .

وهناك طريقتين يمكن استخدامهم لمعالجة مثل هذه الحالة :

الطريقة الأولى : حول مشكلة البرمجة الخطية إلى مشكلة تعظيم ربح وهذه يمكن إجراءها عن طريق ضرب طرفي المعادلة في -١ فتكون دالة الهدف هى :

عظم ت = ـ ت = -٢س$_{١}$ = ٣س$_{٢}$

فإذا قمت بتعظيم القيمة السالبة للتكلفة ت ، فإنك تلقائيا سوف ترفع هذه القيمة مروراً بالقيم السالبة إلى رقم قريب من الصفر هو أكبر قيمة سالبة للحل . وهي (-ت*) كما فى الشكل :

أرقام سالبة (- ت*) صفر أرقام موجبة

وبتأمل ذلك نجد أن القيمة الموجبة للمتغير ت (إجمالى التكلفة) قد تم تخفيضها تلقائياً مروراً بالقيم الموجبة إلى رقم قريب من الصفر هو أقل قيمة للحل . وهي (ت*) كما فى الشكل :

أرقام سالبة صفر ب* أرقام موجبة

وبأختصار فإن تقليل ت يعنى تماماً تعظيم قيمتها السالبة (-ت) . كما أن باقي خطوات الحل سوف تستمر كما في المثال السابق في حالة التعظيم .

الطريقة الثانية: استخدام دالة الهدف كما هى، مع مراعاة ما يلي

١ ـ في خطوة السمبلكس الأولي .. كما هي .

٢ـ في خطوة السمبلكس الثانية .. كما هي .

٣ـ في خطوة اختبار مثالية الحل يجب استخدام القاعدة التى تم ذكرها سابقاً وهي :

« إذا كانت كل القيم الموجودة في الصف الأخير ح - ل هى قيما صفرية أو موجبة فإن الحل الموجود يكون هو الحل الأمثل ، أما إذا كانت واحدة أو أكثر من تلك القيم ذات قيمة سالبة فإن الحل لا يعد حلاً أمثل » .

ويرجع ذلك إلي أنه في حالة تقليل التكاليف تعنى الأرقام المسحوبة فى الصف قبل الأخير ل قيماً تعبر عن الوفر فى التكلفة المترتبة على إنتاج وحدة من السلعة (وذلك بتقليل تكاليف العطل) أما الصف الأخير فيعبر عن الزيادة الصافية المتوقعة فى التكلفة نتيجة إنتاج وحدة من السلعة . ،وذلك يعنى أن القيمة الموجبة تعني أن أى تغيير يترتب عليه ارتفاع التكلفة . أما وجود قيمة سالبة في الصف الأخير فيعني أن التغير يترتب عليه تقليل فى التكالف .

٤ - في خطوة تحسين الحل ، وبالذات عن اختيار المتغير الذي يدخل الحل ، أى الذي سوف يصبح متغيراً أساسيا ، أختر المتغير ذو الرقم السالب الأعلى فى الصف الأخير . أما باقى أجزاء الخطوة الرابعة فهي كما هي .

ثانياً : حالة قيود أكبر من أو يساوى

افرض أن هناك قيد في البرمجة الخطية مثل :

$$٢س_{١} + ٣س_{٢} + س_{٣} \geq ١٠$$

يمكننا تحويل هذه المتباينة إلي معادلة عن طريق طرح قيمة من

الجانب الأيمن سوف نطلق عليها الفائض Surblus . وهى ذات قيمة صفرية أو موجبة حيث أن ذلك يفي بحالتى > أو = في المتباينة . ولذلك يكون لدينا المعادلة .

$$٢س_١ + ٣س_٢ + س_٣ - ف = ١٠$$

$$ف \leq صفر$$

حيث ف تعبر عن الفائض بين الجانب الأيمن والأيسر .

وبتأمل هذه المعادلة الأخيرة نجد أنه ما زالت أمامنا مشكلة واحدة واجبة الحل . وهي أنه سوف نجد صعوبة في عمل حلا مبدئيا في الخطوة الثانية من أسلوب السمبلكس . ففى حالة قيود ≥ أعتبرنا من قبل أن متغير العطل $ع_١$ هو أحد المتغيرات الأساسية فى الحل المبدئى وكان ذلك يرجع إلي أنه مع متغيرات العطل الأخرى يكون مصفوفة الوحدة . أما الآن فإن المتغير ف سوف يكون معاملة فى المصفوفة هو (-١) وبذلك فهو لا يمكن أن يكون جزءا من مصفوفة الوحدة التي تحوي المتيغرات الأساسية . وبدون الدخول في تفاصيل رياضية دعنا نفترض أننا اعتبرنا أن $س_١$،$س_٢$، $س_٣$ هي متغيرات غير أساسية قيمتها صفر وأن المتغير الأساسي سوف يكون هو ف ، ومن المعادلة بالتعويض نجد أن :

$$١٠ = - ف$$

$$ومنها\ ف = - ١٠$$

وهذه القيمة السالبة تتعارض مع القيد الذى أضفناه عندما عرفنا هذا المتغير ف بأنه قيمة غير سالبة .

ولمعالجة هذه المشكلة ، نقوم بإضافة متغير جديد يطلق عليها متغير وهمي artificial variable (و) يظهر فى المعادلة كما يلى :

$$٢س_{١} + ٣س_{٢} + س_{٣} - ف + و = ١٠$$

$$و \geq صفر$$

وفي هذه الحالة يمكن أن نبدأ بالمتغير و كمتغير أساسى ، $س_{١} = س_{٢} = س_{٣} = ف = صفر$ لأنها متغيرات غير أساسية . وذلك يعنى بالتعويض أن و = ١٠ ، وهذا مقبول .

ونظراً لأن هذا المتغير هو متغير وهميا لا يجب أن يظهر فى الحل النهائي ، فإنه يجب أن نعمل على استبعاده . ويكون ذلك بإضافته في دالة الهدف بمعامل يضمن عدم وجودة في الحل . فإذا كانت دالة الهدف هي دالة تعظيم فيجب أن يكون معاملة رقماً سالباً كبيراً وليكن – م (مثلا – م تعادل خسارة مليون جنيه) ، أما إذا كانت دالة الهدف هي دالة تقليل تكاليف فيفترض أن معامل وهو رقماً موجبا كبيرا وليكن م (ويعني ذلك أن إنتاج يترتب عليه زيادة في التكاليف بمليون جنيه). ويعرف ذلك التعديل بأسلوب الكبري big method.

ثالثاً : حالة القيود التى بها يساوى :

افرض أن هناك قيد فى المشكلة مثل :

$$٢س_{١} + ٤س_{٢} = ٦$$

نظراً لأن تلك المعادلة ليس بها متغيراً أساسياً يمثل في مصفوفة

الوحدة فإن المعالجة الرياضية تقتصى إضافة متغيراً وهمياً كمافعلنا في ثانياً كما يلى :

$$٢س_{١} + ٤س_{٢} + و = ٦$$

$$و \le ٦$$

وذلك أيضاً مع إضافة هذا المتغير الوهمى فى دالة الهدف بمعامل + م أو ـ م حسب نوع دالة الهدف .

* سوف نحاول في هذا المثال تغطية عدة حالات مختلفة .فسوف نتناول مشكلة تقليل تكاليف بها أنواع متنوعة من القيود .

قلل ت $= ٥س_{١} + ٧س_{٢}$

قيود : $س_{١} + ٢س_{١} = ٥٠$

$س_{١} \le ٢٠$

$س_{٢} \ge ٢٠$

$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ≤ صفر

الحل :

بالنسبة لدالة الهدف سوف نتركها كما هي دون تغيير . لاحظ أن ذلك حسب الطريقة الثانية التي ذكرت من قبل في حالة استخدام أسلوب السمبلكس في مشكلة تقليل التكاليف . أما القيود فسوف يتم معالجتها حسب نوع الإشارة ، فالقاعدة هي :

في حالة ≤ يضاف متغير فائض ومتغير وهمي .

في حالة ≥ يضاف متغير ظل فقط .

في حالة = يضاف متغير وهمي فقط .

وعلي ذلك تصبح الصيغة الجديدة للمشكلة هي :

قلل ت = ٥س$_{١}$ + ٧س$_{٢}$

في ظل القيود

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + و$_{١}$ = ٥٠

س$_{٢}$ − ع$_{٢}$ + و$_{٢}$ = ٢٠

س$_{٢}$ + ع$_{٢}$ = ٢٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، و$_{١}$ ، و$_{٢}$ ، ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ≤ صفر

وتكون الخطوة التالية هي وضع المعادلات بشكل يسمح بتفريغها في جدول السمبلكس المبدئى وهو ما يطلق عليه الصيغة النمطية للمشكلة ، كما يلي :

قلل ت = ٥س$_{١}$ + ٧س$_{٢}$ + صفرع$_{١}$ + صفرع$_{٢}$ + م و$_{١}$ + م و$_{٢}$

القيود :

س$_{١}$ + ٢س$_{٢}$ + صفرع$_{١}$ + صفرع$_{٢}$ + و$_{١}$ + صفرو$_{٢}$ = ٥٠

س$_{١}$ + صفر س$_{٢}$ − ع$_{١}$ + صفر ع$_{٢}$ + صفر و$_{١}$ + و$_{٢}$ = ٢٠

صفر س$_{١}$ + س$_{٢}$ + صفر ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ + صفر و$_{١}$ + صفر و$_{٢}$ = ٢٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ع$_{١}$ ، ع$_{٢}$ ، و$_{١}$ ، و$_{٢}$ صفر

وبتأمل دالة الهدف عند تلك المرحلة نجد أننا قد أضفنا قيمة جديدة هي (م)(كمعامل للمتغيرات الوهمية . ويرجع ذلك إلي أنه طالما أن هذه متغيرات وهمية فإنه يجب ألا تظهر في الحل الفعلي للتمرين. وحتي يمكن تحقيق ذلك يجب أن يكون تأثيرها على دالة الهدف تأثيرا غير مرغوب ، وطالما أن الحالة التي أمامنا هي حالة تدنية التكاليف لنحمل كل وحدة من المتغيرات الوهمية سواء كانت ١ أو ٢ ، تكلفة المنشأة مبلغا كبيرا جدا من المال ولنطلق عليه مليون جنيه أو باختصار (م) وسوف ينبني علي ذلك أن يقودنا أسلوب الحل بشكل تلقائي إلي استبعاد هذه المتغيرات من الحل حتي لا تتكلف المنشأة مبالغ كبيرة . والقاعدة هي :

في حالة تدنية التكاليف: تعطي المتغيرات الوهمية في دالة الهدف لمعامل م كقيمة وجبة .

في حالة تعظيم الربح : تعطي المتغيرات الوهمية في دالة الهدف المعامل م كقيمة سالبة .

ويمكن الآن اختيار حلا أوليا نظرا لوجود مصفوفة الوحدة في الأعمدة الثلاث الآخيرة من الجانب الأيمن للمعادلات . وحيث أن عدد

المعادلات ثلاثة فإن عدد المتغيرات الأساسية هي ثلاثة في الحل المبدئي ، وهي $و_1$ ، $و_2$ ، $ع_2$ كما أن $س_1$ ، $س_2$ ، $ع_1$ هي المتغيرات الغير أساسية ذات القيم الصفرية . ومعني ذلك أن :

$$\left.\begin{array}{l} س_1 = \text{صفر} \\ س_2 = \text{صفر} \\ ع_1 = \text{صفر} \end{array}\right\} \quad \text{متغيرات غير أساسية}$$

$$\left.\begin{array}{l} و_1 = ٥٠ \\ و_2 = ٢٠ \\ ع_2 = ٢٠ \end{array}\right\} \quad \text{متغيرات أساسية}$$

والآن يمكن عمل جدول السمبلكس المبدئى كما يلي :

ت			٥	٧	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيمة المتغيرات	س١	س٢	ع١	ع٢	و١	و٢
م	و١	٥٠	١	٢	صفر	صفر	١	صفر
م	و٢	٢٠	(١)	صفر	-١	صفر	صفر	١
صفر	ع٢	٢٠	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر
ل		٧٠م	٢م	٢م	- م	صفر	م م	
ت - ل			٥ ـ ٢م	٧ ـ ٢م	م	صفر	صفر	صفر

وبتأمل الجدول نجد أن ذلك ليس هذا هو الحل الأمثل نظرا لوجود قيما سالبة في الصف الآخير (راجع قاعدة اختبار مثالية الحل في حالة تنظيم الربح) . ولذلك يتم اختيار المتغير $س_{١}$ ليدخل الحل نظرا لأن له أكبر قيمة سالبة حيث أن المشكلة الموجودة هي مشكلة تقليل تكاليف ـ وبقسمة قيم المتغيرات علي المعاملات الموجبة الموجودة في العمود المحور $س_{٢}$ يتضح أن المتغير $و_{١}$ هو المتغير الذي من المفروض أن يترك الحل . وبذلك فإن الصف $و_{٢}$ يكون هو الصف المحور والقيمة (١) هي القيمة المحورية . وباستخدام نفس القواعد المستخدمة في حالة تعظيم الربح نصل القيم الجديدة في الجدول الثاني كما في الصفحة التالية .

وبتكرار نفس الخطوات يكون الجدول الثالث كما في الصفحة بعد التالية :

وحيث أن القيم الواردة في الصف الآخير في الجدول الثالث قيما موجبة فيعني ذلك أننا قد توصلنا إلي الحل الأمثل التالي :

$س_{١} = ٢٠$ ، $س_{٢} = ١٥$ ، $ع_{٢} = ٥$

، $ع_{١} = و_{١} = و_{٢} =$ صفر

وذلك يؤدي إلي أقل تكلفة ممكنة وهي ٢٠٥ جنيه .

جدول السمبلكس الثاني

ت			٥	٧	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيمة المتغيرات	س$_{1}$	س$_{2}$	ع$_{1}$	ع$_{2}$	و$_{1}$	و$_{2}$
م	و$_{1}$	٣٠	صفر	(٢)	١	صفر	١	١-
٥	س$_{1}$	٢٠	١	صفر	١-	صفر	صفر	١
صفر	ع$_{2}$	٢٠	صفر	١	صفر	١	صفر	صفر
ل		٣٠م + ١٠٠	٥	٢م	م − ٥	صفر	م	− م + ٥
ت − ل			صفر	٧ − ٢م	٥ − م	صفر	صفر	٢م − ٥

جـ

جدول السمبلكس لثالث

ت			٥	٧	صفر	صفر	م	م
تكلفة الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيمة المتغيرات	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$	$و_١$	$و_٢$
٧	$س_٢$	١٥	صفر	١	$\frac{١}{٢}$	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$
٥	$س_١$	٢٠	١	صفر	١-	صفر	صفر	١
صفر	$ع_٢$	٥	صفر	صفر	$-\frac{١}{٢}$	١	$-\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$
ل		٢٠٥	٥	٧	$-\frac{٣}{٢}$	صفر	$\frac{٧}{٢}$	$\frac{٣}{٢}$
ت - ل			صفر	صفر	$\frac{٣}{٢}$	صفر	$م - \frac{٧}{٢}$	$م - \frac{٣}{٢}$

مشاكل فنية عند إستخدام أسلوب السمبلكس

حالة تعادل القيم الموجبة (أو السالبة) في الصف الأخير :

أوضحنا أن من بين خطوات تحسين الحل (إذا كان ممكناً) أن يتم إختيار المتغير ذو القيمة الموجبة الأعلي (في حالة تعظيم الربح) والمتغير ذو القيمة السالبة الأعلي (في حالة تقليل التكاليف) حتي يدخل الحل . ونواجه أحياناً مشكلة عندما تتعادل القيم الموجبة أو السالبة الخاصة بالمتغيرات الغير أساسية المرشحة لان تدخل الحل لتعتبر متغيرات أساسية . وفي مثل هذه الحالة يمكن أن يتم الإختيار من بينها بشكل تحكمي . فإختيار أي من هذه المتغيرات سوف يوصل في النهاية إلي الحل الأمثل بعد خطوات معينة . ولكن يفضل حتي يمكن تقليل عدد الخطوات اللازمة للوصول إلي الحل الأمثل إتباع النصائح الآتية :

١ - إذا كان التعادل بين متغيراً أصلياً (س ١ ، س ٢ ...) ومتغيراً إضافياً (ع ١ ، ع ٢ ...) فيفضل إختيار المتغير الأصلي لأن يدخل الحل . ومثال ذلك ، كما في الجدول التالي ، إذا كانت المفاضلة بين ع ١ ، س ٣ نظراً لتساوي المعامل الموجب في الصف الأخير يجب إختيار س ٣ ليصبح متغيراً أساسياً ، أي ليدخل الحل في جدول السمبلكس التالي .

ربح الوحدة	متغيرات أساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	س٣	ع١	ع٢	ع٣
	س١							
	ع٢							
	ع٣							
	ل							
	ح - ل		صفر	٢	٤	٤	صفر	صفر

٢ - إذا كان التعادل بين متغيرين أصليين (س١ ، س٢ ...) فيتم الإختيار بطريقة عشوائية .

٣ - إذا كان التعادل بين متغيرين إضافيين (ع١ ، ع٢ ...) فيتم الإختيار بطريقة عشوائية .

حالة تعادل خارج القسمة عند تحديد المتغيرالذي يترك الحل :

في خطوة تحسين الحل يتم تحديد المتغير الأساسي الذي يجب أن يترك الحل . ويتم ذلك بقسمة قيم المتغيرات الأساسية علي المعاملات الموجبة في العمود المحور ، وإختيار المتغير الموجود في الصف ذو خارج القسمة الأقل . ويحدث أحياناً أن يتعادل خارج القسمة لصفين أو أكثر ، مما يؤدي إلي ظهور ما يسمي بمشكلة عدم الإنتظام degeneracy .

والخطورة الأساسية في هذه الحالة هي أن إختيار أحد المتغيرات

الذي يترك الحل عشوائياً قد يؤدي إلي الوصول إلي حلاً جديداً قيمة أحد المتغيرات الأساسية فيه تعادل الصفر . ومثال ذلك :

عظم ح = ٨٠ س$_{١}$ + ٧٠ س$_{٢}$

القيود ٢ س$_{١}$ + س$_{٢}$ $\geq$ ١٢٠

س$_{١}$ $\geq$ ٧٠

س$_{١}$ + س$_{٢}$ $\geq$ ٦٠

س$_{١}$ ، س$_{٢}$ $\leq$ صفر

يوضح الجدول التالي ، جدول السمبلكس المبدئي اللازم لهذه المشكلة :

ح			٨٠	٧٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$	ع$_{٣}$
صفر	ع$_{١}$	١٢٠	٢	١	١	صفر	صفر
صفر	ع$_{٢}$	٧٠	١	صفر	صفر	١	صفر
صفر	ع$_{٣}$	٦٠	١	١	صفر	صفر	١
ل		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ح - ل			٨٠	٧٠	صفر	صفر	صفر

في الجدول المبدئي عند محاولة تحديد المتغير الذي يترك الحل نقوم بقسمة :

١٢٠ ÷ ٢ = ٦٠

٧٠ ÷ ١ = ٧٠

٦٠ ÷ ١ = ٦٠

فإذا قمنا بإختيار الصف ع ١ كصف محوري فإن الجدول التالي سوف يصبح :

ح			٨٠	٧٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س ١	س ٢	ع ١	ع ٢	ع ٣
٨٠	س ١	٦٠	١	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	صفر	صفر
صفر	ع ٢	١٠	صفر	$-\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	١	صفر
صفر	ع ٣	صفر	صفر	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	صفر	١
ل		٤٨٠	٨٠	٤٠	٤٠	صفر	صفر
ح - ل			صفر	٣٠	- ٤٠	صفر	صفر

وفي هذا الجدول يلاحظ أن قيمة المتغير الأساسي ع ٣ = صفر وهذا مخالف للخاصية الأساسية التي ذكرناها في الحل الأساسي وهو أن تكون قيم المتغيرات الغير الأساسية هي التي تساوي صفر .

ويترتب علي ذلك في الخطوات التالية أن الحل التالي في جدول السمبلكس الثالث سوف يكن س ١ = ٦٠ ، ع ٢ = ١٠ ، س ٢ = صفر ، ع ١ = ع ٣ = صفر ، وذلك يحق ربحاً قدره ٤٨٠ وهو ذات الربح المحقق في الخطوة السابقة . ويعني ذلك أننا نغير الحل دون أن نغير الربح . وذلك عكساً للمنطق الأساسي لأسلوب السمبلكس . بل هناك أكثر من ذلك بسبب مشكلة عدم الإنتظام . فإنك عندما تحاول تحسين الحل الأخير الذي ينتج من جدول السمبلكس الثالث سوف تجد أنك تعود في جدول السمبلكس الرابع إلي ذات الحل الذي توصلنا إليه في جدول السمبلكس الثاني . وتعرف هذه الخاصية بمشكلة أن نكرر نفس الحلول ونعود إليها cycling دون الوصول إلي الحل الأمثل. ويهمنا الان أن نذكر بعض الخصائص الأساسية لمشكة عدم الإنتظام :

١ - لا تمثل هذه الخاصية أية مشكلة عند حل المشكلة بالطريقة البيانية .

٢ - إذا ظهر أحد المتغيرات الأساسية بقيمة صفر في جدول السمبلكس النهائي فإن ذلك لا يمثل أية مشكلة .

٣ - إذا ظهر تعادل عند القسمة بغرض تحديد المتغير الذي يترك الحل فإن الحل التالي سوف يكون حلاً غير منتظماً degenerate.

٤ - إذا ظهر أحد المتغيرات الأساسية بقيمة صفر في أحد مراحل الحل قبل الجدول النهائي فإن الحل قد يواجه مشكلة تكرار نفس

الحلول والعودة إليها دون الوصول إلي الحل الأمثل . ولكنه في أحيان كثيرة قد لا تحدث هذه المشكلة .

٥ – هناك بعض القواعد الرياضية ، الخارجة عن نطاق هذا الكتاب ، والتي تستخدم في الإختيار بين المتغيرات التي تترك الحل وذلك لضمان عدم حدوث مشكلة تكرار نفس الحلول cycling . ولكن طالما أن هذه المشكلة لا تظهر إلا نادراً بالنسبة لغالبية المشاكل فإن بعض الكتاب [١] يقترح إختيار الصف الأعلي كصفاً محورياً في حالة تعادل خارج القسمة .

حالة وجود أكثر من حل أمثل :

أوضحنا في الطريقة البيانية أن تعادل ميل أحد القيود مع ميل دالة الهدف سوف يؤدي إلي وجود أكثر من حل أمثل ، وأمكن الإستدلال علي ذلك بإنطباق دالة الهدف علي جزء من محيط المنطقة الممكنة وليس تماس نقطة منه . أما في ظل أسلوب السمبلكس فإن وجود صفر في الصف الأخير (ح – ١) تحت واحد أو أكثر من المتغيرات الغير أساسية يعني وجود أكثر من حل أمثل . ولنتأمل المثال التالي والذي يوضح جدول السمبلكس النهائي لأحد المشكلات الإفتراضية :

ح			٦٠	٦٠	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
٦٠	$س_1$	٢٠	١	صفر	$\frac{٢}{٣}$	$-\frac{١}{٢}$
٦٠	$س_2$	١٠	صفر	١	$-\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٢}$
ل		١٨٠٠	٦٠	٦٠	٢٠	صفر
ل − ح			صفر	صفر	٢٠	صفر

يتضح من هذا الجدول أن الحل الموجود هو حلاً أمثل فيه :

$س_1$ = ٢٠ ، $ع_1$ = صفر

$س_2$ = ١٠ ، $ع_2$ = صفر

ولكننا تعارفنا من قبل علي أن قيم الصف الأخير الخاصة بالمتغيرات الأساسية يجب أن تكون صفر ، وذلك صحيح في لجدول مع تعديل آخر وهو أن هناك متغيراً غير أساسياً آخر ($ع_2$) معامله في الصف الأخير هو صفر . ويعني ذلك أن $ع_2$ يمكن إدخالها في الحل دون تأثير علي رقم الربح المحقق زيادة أو نقصاً . وهذه هي حالة وجود أكثر من حل أمثل . فإذا أدخلنا ($ع_2$) في الحل فإن الجدول لتالي يكون هو :

ح			٦٠	٦٠	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$
٦٠	س$_{١}$	٣٠	١	١	$\frac{١}{٣}$	صفر
صفر	ع$_{٢}$	٢٠	صفر	٢	$-\frac{٢}{٣}$	١
ل		١٨٠٠	٦٠	٦٠	٢٠	صفر
ل − ح			صفر	صفر	−٢٠	صفر

وفيه نجد أن الحل الموجود هو حلاً أمثل يحقق نفس الربح ولكن القيم هي :

س$_{١}$ = ٣٠ ، ع$_{١}$ = صفر

س$_{٢}$ = صفر ، ع$_{٢}$ = ٢٠

ويعني ذلك أنه يمكن تحقيق نفس الربح بمجموعة جديدة من قيم المتغيرات . وذلك يعد ميزة بالنسبة لمتخذي القرار كما أوضحنا في حالة الطريقة البيانية .

حالة عدم وجود حلاً ممكناً :

يمكن معرفة ذلك أيضاً من جدول السمبلكس النهائي . فإذا تم التوصل إلي الحل الأمثل وكان واحداً أو أكثر من المتغيرات الوهمية

(و) ضمن المتغيرات الأساسية فإن ذلك يعني عدم وجود أي حل ممكن لهذه المشكلة . ويجب أن نلاحظ أيضاً أنه في حالة عدم الإنتظام إذا ظهر واحد أو أكثر من المتغيرات الوهمية في المتغيرات الأساسية بقيمة قدرها صفر فإن هذه لا تعد حالة عدم إمكانية وجود حلاً أمثل .ويظهر الجدول التالي أحد حالات عدم وجود حلاً أمثل لمشكلة تقليل تكاليف كما تظهر في جدول السمبلكس النهائي :

ت			٧	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$	$و_1$
٣	$س_2$	٥	١	١	$\frac{1}{2}$	صفر	صفر
م	$و_1$	٢	١ -	صفر	١ -	١ -	١
ت		١٥+١٢م	٣ - م	٣	١,٥ - م	- م	[illegible]
ت - ل			٤ + م	صفر	م $- \frac{3}{2}$	م	صفر

حالة المشكلة غير المحدودة :

كما ذكرنا عند إستخدام الأسلوب البياني فإن هذه الحالة تعني إمكانية زيادة الأرباح (أو تقليل التكاليف) إلي ما لا نهاية . ويستدل عليها في أسلوب السمبلكس في خطوة تحديد المتغير الواجب أن يترك الحل بقسمة قيم المتغيرات علي المعاملات الموجبة في العمود .

المحوري . فقد نجد أحياناً أنه لا توجد قيم موجبة في العمود المحوري. بمعني أن كل القيم إما صفرية أو سالبة . وفي هذه الحالة تعتبر المشكلة غير محدودة .

ويوضح الجدول التالي أحد الحالات التي تعبر عن هذه الظاهرة في أحد مشاكل تعظيم الربح :

ح			٢٠	١٥	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$
١٥	$س_2$	١٢	صفر	١	صفر	١
٢٠	$س_1$	٤	١	صفر	$-\frac{1}{4}$	١
ل		٢٦٠	٢٠	١٥	٥ -	٤٥
ح - ل			صفر	صفر	٥	٤٥ -

ففي هذا الجدول من الواضح أن الحل ليس هو الحل الأمثل . ويجب إدخال المتغير $ع_1$ في الحل . وعند محاولة تحديد المتغير الذي يخرج من الحل نجدأنه ليست هناك قيم موجبة في العمود $ع_1$. وبالتالي لا يمكن إجراء عملية القسمة وبالتالي فإن المشكلة بلا حدود.

تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis

بعد أن نصل إلي الحل الأمثل لمشكلة لبرمجة الخطية ، يكون في الغالب هناك تساؤل عما سوف يحدث لهذا الحل إذا تغير أحد أجزاء المشكلة التي تم حلها . ومثال ذلك ، قد تكون مهتمين بأسئلة مثل :

١ - ماذا يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت القيمة الموجودة في الطرف الأيسر لأحد القيود . ماذا في مثالنا السابق إذا تغيرت حصة الخشب المتاحة أسبوعياً ؟

٢ - ماذا سوف يحدث للحل الأمثل إذا تغيرت أحد القيم الموجودة في دالة الهدف . ماذا في مثالنا لو زاد الربح المحقق من إنتاج وبيع المكتب بمبلغ معين ؟

٣ - ماذا سوف يحدث لحل الأمثل إذا تغيرت المعاملات الموجودة في الطرف الأيمن من متباينات القيود ؟ ما هو أثر أن تزيد عدد ساعات العمل اللازمة لإنتاج المقعد برقم معي ؟ .

في مثل هذه الحالات يثار التساؤل حول ما إذا كان الحل الأمثل سوف يتغير أو سوف يبقي كما هو ؟ وإذا كان سوف يتغير هل لابد من حل كل المشكلة مرة أخري بالقيم الجديدة للوصول إلي الحل الأمثل الجديد ؟ هل من طريقة لمعرفة الحل الأمثل الجديد دون حل المشكلة مرة أخري ؟ الإجابة علي ذلك تكمن فيما سمي بتحليل الحساسية Sensitivity analysis والذي - كما هو واضح من التسمية - يقيس درجة حساسية الحل الأمثل الحالي للتغير في القيم الواردة parameters في المشكلة الأصلية . ويمتاز هذا المدخل بأنه يوفر تكلفة وجهد إعادة حل المشكلة مرة أخري حتي في حالة إستخدام الكومبيوتر . وسوف نتناول هنا عرض هذا النوع من التحليل في الحالات الثلاث التي ذكرناها سابقاً ، وهي : (١) حالة تغير قيم الطرف الأيسر ، (٢) حالة تغير أحد القيم الموجودة في دالة الهدف ، و (٣) حالة تغير المعاملات في الطرف الأيمن في متباينات القيود .

أولاً : تغير قيم الطرف الأيسر في القيود :

يعبر الجانب الأيسر من القيود في غالب الأحيان عن قيمة الموارد المتاحة . وطالما أن هذه الموارد تعتمد علي توافر الأموال لدي المنشأة وظروف السوق ، وظروف التشغيل الفعلية ، وعلي العاملين أنفسهم . فإنه من الموقع دائماً أن تتغير قيمة تلك الموارد . ولنتتبع معني هذه التغيير . في القيد الأصلي الخاص بالمادة الخام (الأخشاب) في المثال السابق .

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ \geq ١٢٠$$

إذا إفترضنا أن قيمة الموارد المتاحة من هذا النوع قد إرتفعت إلي ١٢١ وحدة فإن القيد يصبح :

$$٥ س_١ + ٤ س_٢ \geq ١٢١$$

وحسب أسلوب الرسم البياني فإنه من الواضح أن ميل الخط لم يتغير وإنما الذي تغير هو تقاطع هذا القيد مع كل من محور $س_١$ ،

محور س $_{٢}$ (يمكن للطالب إثبت ذلك بنفسه بإستخدام ورقة بيانية ورَسم الخطين) . ويعني ذلك أن القيد الجديد سوف يوازي لقيد القديم وسوف يقع أعلي منه (لأن ١٢١ > ١٢٠) . وبالطبع يمكن تتبع أثر ذلك بيانياً علي الحل الأمثل ، إلا أن ذلك لا يصلح في حالة وجود أكثر من متغيرين . ولذلك سوف نناقش ذلك بناءاً علي حدول السمبلكس النهائي الذي توصلنـ إليه والذي نورده هنا مرة أخري كما يلي :

جدول الحل الأمثل (الأخشاب = ١٦٠)

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س $_{١}$	س $_{٢}$	ع $_{١}$	ع $_{٢}$
١٠	س $_{١}$	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س $_{٢}$	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٣}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح − ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

ولنفرض الآن كما ذكرنا لن الأخشاب المتاحة زادت إلي ١٢١، والمراد تحديد أثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي وهو :

س $_{١}$ = ٢٠ ، س $_{٢}$ = ٥ ، ع $_{١}$ = ع $_{٢}$ = صفر ؟

نظراً لأن ع $_{١}$ = صفر في الحل الأمثل فإن ذلك يعني أن كمية

الأخشاب الغير مستخدمة تعادل صفر ، وهذا معناه أن جميع الأخشاب مستخدمة بالكامل . ومن ثم فإن زيادة الأخشاب سوف يترتب عليها بالضرورة تغير في إنتاج كل من السلعتين أو في واحدة منهم فقط . ولتحديد ذلك ترجع إلي العمود ع $_١$ والذي يحوي قيم تعبر كما أوضحنا من قبل عن معاملات إحلال ع $_١$ مع كل من س $_١$ ، س $_٢$. فالقيمة $\frac{١}{٣}$ تعني أن تخفيض ع $_١$ (زيادة الأخشاب المستخدمة) بوحدة واحدة سوف يترتب عليه زيادة س $_١$ بما يعادل $\frac{١}{٣}$ وحدة . كما أن زيادة ع $_١$ (تخفيض الأخشاب المستخدمة) بوحدة سوف يترتب عليه تخفيض س $_١$ بما يعادل $\frac{١}{٣}$ وحدة . وبنفس المنطق فإن ($-\frac{١}{٣}$) تحكم العلاقة بين ع $_١$ ، س $_٢$.

والآن إذا زادت قيمة الأخشاب المتاحة إلي ١٢١ وحدة ، فإن تأثير الوحدة الجديدة الزائدة من الأخشاب سوف يكون له نفس تأثير تخفيض ع $_١$ بوحدة واحدة . وبالنظر إلي العمود ع $_١$ نجد أن تخفيض ع $_١$ بمقدار الوحدة سوف يترتب عليه : (أ) زيادة س $_١$ بمقدار $\frac{١}{٣}$ وحدة و (ب) تخفيض س $_٢$ بمقدار $\frac{١}{٦}$ وحدة . يتأمل أثر ذلك علي كمية الخشب نجد أن :

الخشب الإضافي المستخدم في س $_١$ = $\frac{١}{٣}$ ×٥(للوحدة) = $\frac{٥}{٣}$

الخشب الذي يتم توفيره من س $_٢$ = $\frac{١}{٦}$ ×٤ (للوحدة) = $\frac{٤}{٦}$

وبالتالي فإن صافي الخشب الإضافي المستخدم

$$= \frac{٥}{٣} - \frac{٤}{٦} = \frac{٦}{٦} = ١ \text{ وحدة}$$

وهذه الوحدة هي الوحدة الإضافية في الخشب (١٢١ - ١٢٠)

والآن ، إذا كان هذا هو التغير الوحيد فإننا يمكننا عمل جدول السمبلكس الذي يعبر عن الحل الأمثل عندمايزيد الطرف الأيسر إلي ١٢١ كما يلي (يمكن للقاريء أن يتأكد من خلال خطوات تفصيلية أن ذلك هو جدول الحل الأمثل النهائي الجديد) :

جدول الحل الأمثل (الأخشاب = ١٢١)

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$
١٠	$س_١$	$٢٠\frac{١}{٣}$	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	$س_٢$	$٤\frac{٥}{٦}$	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		$٢٤٦\frac{٥}{٦}$	١ -	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

وقد تم التوصل إلي القيم الجديدة للمتغيرات الأساسية عن طريق جمع معاملات العمود $ع_١$ وقيم المتغيرات الأساسية في جدول الحل الأمثل قبل تغيير كمية الأخشاب . ويوضح الجدول أن ربح الحل قد إرتفع إلي $٢٤٦\frac{٥}{٦}$. ويعبر ذلك عن زيادة بمقدار سعر الظل الخاص بالمتغير $ع_١$ في الجدول . فالربح الجديد $٢٤٦\frac{٥}{٦} = ٢٤٥ + \frac{١١}{٦}$.

لاحظ أن المتغيرات الأساسية في الحل لم تتغير وإنما الذي تغير هو قيم تلك المتغيرات.

ويجب هنا أن نوضح أن هذا التحليل لا يعني أنه من الممكن وإلي مالا نهاية زيادة الربح عن طريق زيادة وحدات من الأخشاب ، فقد لا يكون ممكناً infeasible بعد كمية معينة من التغيير إستغلال الموارد الزائدة . ويعبر عن ذلك بالقول بأن ذلك يعد صحيحاً بشرط ألا يكون التغيير كبيراً إلي الحد الذي يجعل الحل حلاً غير ممكناً . ولهذا نكون مهتمين دائماً بتقرير ماهو الحد الذي يمكن أن تتغير القيمة في الطرف الأيسر من القيد دون أن تتغير ماهية (وليست قيمة) المتغيرات الأساسية في الحل الحالي الأمثل ؟ أي أننا نريد إلي أي حد يمكن أن يتغير الطرف الأيسر لأحد القيود وتظل المتغيرات الأساسية (وليست قيمها) كما هي ؟

لإيضاح ذلك دعنا نفترض أن الطرف الأيسر من القيد الأول قد تغير بقيمة هي Δ فإذا إستبدلنا القيمة ١٢٠ بالقيمة ١٢٠ + Δ في جدول السمبلكس المبدئي وقمنا بعمل نفس خطوات الحل نجد أن الجدول النهائي الذي به الحل الأمثل هو كما يلي :

ح			١٠		صفر	صفر
سعر الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	٢٠ + ١/٣ Δ	١	صفر	١/٣	− ١/٣
٩	س٢	٥ − ١/٦ Δ	صفر	١	− ١/٦	٥/١٢
ل		٢٤٥ + ١١/٦ Δ	١٠	٩	١١/٦	٥/١٢
ح − ل			صفر	صفر	− ١١/٦	− ٥/١٢

ويلاحظ على هذا الجدول أن المتغير الوحيد كان في عمود قيم المتغيرات الأساسية . فلم تتغير تلك المتغيرات ولكن تغيرت قيمتها . كذلك فإن مصفوفة المعاملات كما هي ، كما أن الصفوف ل ، (ح − ل) لم يتغيرا . وأكثر من ذلك فإن القيم الجديدة في العمود الخاص بقيم المتغيرات لها علاقة بالمعاملات الموجودة في العمود ع . فمثلاً (٢٠ + ١/٣ Δ) ما هي إلا القيمة الأصلية ٢٠ + القيمة الموجودة في العمود ع ١ في الصف س ١ مضروبة في مقدار التغير . كذلك فإن (٥ − ١/٦ Δ) ما هي إلا القيمة الأصلية ٥٠ + القيمة الموجودة في العمود ع ١ في الصف س ٢ مضروبة في مقدار التغير Δ . أي أنها مرتبطة تماماً بالعمود ع ١ الذي هو الطاقة العاطلة المناظرة للقيد الأول . ويمكن تلخيص الفارق بين الجدول الأصلي والجدول الذي به تغير قيمته Δ في القيد الأول كما يلي :

قيم المتغيرات الجديدة = قيم المتغيرات الأصلية + معاملات العمود ع $_{١}$ × Δ

$$٢٠ + \frac{١}{٣}\Delta = ٢٠ + \frac{١}{٣} \times \Delta$$

$$٥ + \frac{١}{٦}\Delta = ٥ + \left(-\frac{١}{٦}\right) \times \Delta$$

وحتي يكون هذا الحل الجديد حلاً ممكناً feasible فيجب ألا تأخذ قيم س $_{١}$ ، س $_{٢}$ قيماً سالبة . ويعني ذلك شرطين :

$$\text{صفر} \le \frac{١}{٣}\Delta + ٢٠$$

$$-٢٠ \le \frac{١}{٣}\Delta$$

وذلك يعني $-٦٠ \le \Delta$ ———— (١)

وأيضاً $\text{صفر} \le ٥ - \frac{١}{٦}\Delta$

$$-٥ \le -\frac{١}{٦}\Delta$$

بالضرب في (−) $٥ \le \frac{١}{٦}\Delta$

وذلك يعني $٣٠ \le \Delta$ ———— (٢)

بوضع الشرطين معاً نجد أن $-٦٠ \le \Delta \le ٣٠$

ويعني ذلك أن هناك مدي معين للتغير الذي يمكن أن يحدث في الطرف الأيسر للقيد الأول ، دون أن يتغير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة في الحل الأمثل الحالي . وهذا المدي هو بين ٣٠ ، − ٦٠ . وطالما أن القيمة الحالية التي بدأنا بها للطرف الأيسر للقيد الأول هي

١٢٠ ، فإن المدي range الذي يمكن أن نأخذ قيمة الطرف الأيسر دون تغيير نوع المتغيرات الأساسية هو :

القيمة الأصلية + ٣٠ ≤ مدي الطرف الأيسر ≤ القيمة الأصلية – ٦٠

١٢٠ + ٣٠ ≤ مدي الطرف الأيسر ≤ ١٢٠ – ٦٠

١٥٠ ≤ مدي الطرف الأيسر ≤ ٦٠

أي أن تغير حجم الموارد المتاحة من الأخشاب في حدود ٦٠ ، ١٥٠ وحدة (مع بقاء كل شيء علي ما هو عليه) سوف لا يترتب عليه تغيير نوع المتغيرات الأساسية الموجودة في الحل الأمثل الحالي وهي س ١ ، س ٢ . ولكن بالطبع سوف تتغير قيم هذه المتغيرات وبالتالي أرقام الربح المحققة .

وينبني علي ذلك ، أنه في حدود هذا المدي يمكن دائماً معرفة القيم الموجودة للمتغيرات الأساسية دون الحاجة إلي حل المشكلة من جديد . ومثال ذلك إذا زادت الأخشاب المتاحة بعشرة وحدات فإن قيم الحل الأمثل الجديد يمكن التوصل إليها كما يلي :

المتغيرات الأساسية	قيم الحل الأمثل القديم	عمود ع ١ في الحل الأمثل	قيم الحل الأمثل الجديد
س ١	٢٠	$\frac{١}{٣}$	٢٠ + $\frac{١}{٣}$ (١٠) = $٢٣ \frac{١}{٣}$
س ٢	٥	$-\frac{١}{٦}$	٥ – $\frac{١}{٦}$ (٩) = $٣ \frac{١}{٣}$

ويكون الربح الجديد هو :

$$(٢٣\tfrac{١}{٣})\,(١٠) + (٣\tfrac{١}{٣})\,(٩) = ٢٦٣\tfrac{١}{٣}$$ جنيه .

وبنفس المنطق فإن تخفيض كمية الأخشاب بعشر وحدات ، والذي يعني أن تكون $\Delta = -١٠$ يتم تحديد أثره كما يلي :

المتغيرات الأساسية	قيم الحل الأمثل القديم	عمود $ع_{١}$ في الحل الأمثل	قيم الحل الأمثل الجديد
$س_{١}$	٢٠	$\frac{١}{٣}$	$٢٠ + \frac{١}{٣}(-١٠) = ١٦\frac{٢}{٣}$
$س_{٢}$	٥	$-\frac{١}{٦}$	$٥ - \frac{١}{٦}(-١٠) = ٦\frac{٢}{٣}$

ويكون الربح الجديد هو :

$$(١٦\tfrac{٢}{٣})\,(١٠) + (٦\tfrac{٢}{٣})\,(٩) = ٢٢٦\tfrac{٢}{٣}$$ جنيه .

وقبل أن ننتهي من هذه النقطة نود أن نقدم طريقة رياضية (للراغبين فيها فقط) مختصرة لتحديد المدي range الذي يمكن أن تتغير فيه قيمة الطرف الأيسر في أحد القيود دون تغيير نوع من المتغيرات الأساسية الموجودة في الحل الأمثل .

بفرض أن :

$ش_{د}$ = القيمة الأصلية الموجودة في الجانب الأيسر من القيد الدالي

$ق_{ن}$ = قيمة المتغير الأساسي النوني في جدول الحل الأمثل النهائي

$ا_{د ن}$ = قيمة المعاملات في العمود الخاص بالمتغير ع المناظر للقيد الذي يتم تغيير طرفه الأيسر .

وذلك علي أساس أن :

د = ١ ، ٢ ، ... ، عدد القيود

ن = ١ ، ٢ ، ... ، عدد المتغيرات الأساسية

فإن الحد الأدني للطرف الأيسر في القيد

= أكبر القيم من بين (القيمة الأصلية − $\frac{\text{قيمة المتغير الأساسي}}{\text{قيمة المعاملات}}$) لكل المتغيرات عند $ا_{د ن}$ > صفر

= أعظم ($ش_{د}$ − $\frac{ق_{ن}}{ا_{د ن}}$) لكل المتغيرات عند $ا_{د ن}$ > صفر

كذلك فإن الحد الأقصي للطرف الأيسر من القيد

= أقل القيم من بين (القيمة الأصلية − $\frac{\text{قيمة المتغير الأساسي}}{\text{قيمة المعاملات}}$) لكل المتغيرات عند $ا_{د ن}$ > صفر

= أقـل ($ش_{د}$ − $\frac{ق_{ن}}{ا_{د ن}}$) لكل المتغيرات عند $ا_{د ن}$ > صفر

وبتطبيق ذلك علي القيد الأول . نبدأ من جدول الحل النهائي وعلي أساس أن القيمة الأصلية في الطرف الأيسر هي ١٢٠ ونقوم بالخطـوات الموضحـة في الجدول والتي يتضح منهـا أن الحـد الأدنـي هـو ٦٠.

المتغيرات الأساسية	q_n	a_{dn} في عمود ع ٢	(١) ÷ (٢)	١٢٠ - (٣)
$س_1$	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	٦٠	٦٠
$س_2$	٥	$-\frac{١}{٦}$	غير موجبة	غير موجبة

وللوصول إلي الحد الأقصي نقوم بعمل خطوات الجدول التالي :

المتغيرات الأساسية	q_n	a_{dn} في عمود ع ١	(١) ÷ (٢)	١٢٠ - (٣)
$س_1$	٢٠	$\frac{١}{٣}$	ليست سالبة	ليست سالبة
$س_2$	٥	$-\frac{١}{٦}$	٣٠ -	١٢٠-(-٣٠) = ١٥٠

ومنه يتضح أن الحد الأقصي للجانب الأيسر للقيد الأول هو ١٥٠ .

وبنفس الإجراءات يمكن الوصول إلي الحد الأدني والحد الأقصي الذي يمكن أن يأخذه الطرف الأيسر من القيد الثاني علي النحو التالي:

المتغيرت الأساسية	q_n	a_{dn} في عمود ع ٢	(١) ÷ (٢)	٦٠ - (٣)
$س_1$	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	غير موجب	غير موجب
$س_2$	٥	$\frac{٥}{١٢}$	١٢	٤٨

ومنه الحد الأدني للطرف الأيسر (عدد ساعات العمل) = ٤٨

(١)　　　(٢)　　　(٣)

المتغيرات الأساسية	قن	أ د ن في عمود ع ٢	(١) ÷ (٢)	٦٠ - ٣١
س ١	٢٠	$-\frac{١}{٣}$	٦٠ -	١٢٠
س ٢	٥	$-\frac{٥}{١٢}$	غير سالب	غير سالب

ومنه الحد الأقصي للطرف الأيسر (عدد ساعات العمل) ١٢٠

تخلص من كل هذا إلي بعض الحقائق الهامة وهي :

١ - إذا كان تغير قيمة الطرف الأيسر الخاص بأحد القيود في حدود المدي الذي تم ذكره بإستخدام تحليل المعني أو المعادلات . فإن نوع المتغيرات الأساسية الواردة في جدول الحل الأمثل سوف يظل كما هو . ولا يعني ذلك أن قيمها سوف تظل كما هي . ويمكن الوصول إلي القيم الجديدة لذات المتغيرات الأساسية عن طريق ضرب مقدار التغير × المعامل المناظر في عمود العطل الخاص بالقيد ثم إضافة ذلك إلي القيمة المناظرة في صف المتغيرات الأساسية .

٢ - إذا كان تغير قيمة الطرف الأيسر الخاص بأحد القيود ليس في حدود المدي ، فإن نوع المتغيرات الأساسية الواردة في جدول الحل

الأمثل الحالي سوف يتغير . ولذلك يجب حل المشكلة من البداية مرة أخري للوصول إلي الحل الأمثل الجديد .

ثانياً : التغير في مساهمة الوحدة :

ويقصد ذلك التغير الذي يحدث في ربح الوحدة أو تكلفة الوحدة في دالة الهدف . فعادة ما يكون الممارسين في حاجة إلي معرفة أثر التغير في سعر الوحدة وبالتالي ربحيتها علي القرار الخاص بالمزيج الإنتاجي . فظروف السوق في حالة ديناميكية مستمرة يصعب معها إفتراض ثبات الأسعار . كذلك فإن تغير تكلفة الإنتاج نتيجة لظروف التشغيل الفعلية والتقدم التكنولوجي الدائم سوف يستلزم إعادة النظر في توليفة الإنتاج من السلع المختلفة . والسؤال الآن هو : ما تأثير كل ذلك علي الحل الأمثل الذي توصلنا إليه في مشكلة البرمجة الخطية التي أمامنا ؟ قبل الجابة علي هذا السؤال يهمنا أن نشير إلي أن التغيير في دالة الهدف لا يؤثر علي الإطلاق علي المنطقة الممكنة للحلول feasible arc . فنحن نعلم ذلك من الطريقة البيانية . وهو صحيح أيضاً عند إستخدام أسلوب السمبلكس . وينبني علي ذلك أننا سوف نهتم بأثر هذا التغيير علي مثالية opti-mality الحل الحالي ممثلاً في الصف الأخير ح – ل . وهنا سوف نعالج حالتين مختلفتين . أما الأولي فهي أن يكون تغير مساهمة الوحدة خاص بأحد المتغيرات الغير أساسية . والثانية هي حالة أن يكون التغير خاص بأحد المتغيرات الأساسية .

(أ) التغير في مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الغير أساسية :

طالما أن الذي يحكم الوصول إلي الحل الأمثل هو القيم الموجودة في الصف الأخير (ح - ل) في جدول السمبلكس النهائي ، وأن القيم الخاصة بالمتغيرات الغير أساسية في هذا الجدول في الصف الأخير تكون دائماً صفراً أو قيماً سالبة في حالة تعظيم الربح ، فإننا يمكننا أن نضع القواعد التالية :

١ - إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير الغير أساسي >

- (معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف تؤدي إلي حلاً آخر جديد يدخل فيه المتغير هذا كمتغيراً أساسياً ويحقق ربحاً أعلي .

٢ - إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير الغير أساسي =

-(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف تؤدي إلي أن يظل الحل الحالي حلاً أمثل مع ظهور حلولاً أخري مثلي تحقق نفس الربح .

٣ - إذا كانت الزيادة في ربح الوحدة للمتغير الغير أساسي <

- (معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن تلك الزيادة سوف لا تؤدي إلي أي تغيير في الحل الأمثل الحالي .

ويلاحظ هنا أننا قد ركزنا علي زيادة الربح للوحدة، نظراً لأن تخفيض ربح الوحدة للمتغير غير الأساسي لا يترتب عليه أي تغيير علي الإطلاق .

مثـــال :

كان جدول السمبلكس النهائي لأحد حالات تعظيم الربح كما يلي (لا داعي لكل الأرقام في مصفوفة المعاملات لإيضاح المعني) .

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س١	س٢	س٣	ع١	ع٢	ع٣
٤	س١	٦ ٢/٣	١/٣					
٣	س٢	١٦ ٢/٣	٥/٦					
صفر	ع٣	٢٦ ٢/٣	٥/٣					
ل		٧٦ ٢/٣	٢٣/٦	٤	٣	٥/٦	٢/٣	صفر
ح - ل			١١/٦	صفر	صفر	- ٥/٦	- ٢/٣	صفر

والمطلوب:

١ - إيضاح أثر التغير في ربح الوحدة من س١ بزيادة قدرها ٣ جنيه .

٢ - إيضاح أثر التغير في ربح الوحدة من $س_١$ بزيادة قدرها $\frac{١١}{٦}$ جنيه.

٣ - إيضاح أثر التغير في ربح الوحدة من $س_١$ بزيادة قدرها ١ جنيه .

الحــل :

١ - واضح أن زيادة ربح الوحدة في العمود الأول من ٢ إلي خمسة جنيهات سوف تؤدي إلي أن تصبح قيمة ح -ل في العمود $س_١$ = $\frac{٢٣}{٦}$ = $\frac{٧}{٦}$ وهي قيمة موجبة مما يستلزم إدخال $س_١$ في الحل نظراً لأن الحل الحالي سوف لا يصبح حلاً أمثل . وهنا يجب عمل التعديلات الازمة للوصول إلي الحل الأمثل الجديد وذلك حسب الطريقة المعتادة في أسلوب السمبلكس إبتداءاً من الجدول الذي بين أيدينا وهو جدول الحل الأمثل الحالي قبل التغيير .

٢ - واضح أن زيادة ربح الوحدة في العمود الأولي إلي $\frac{١١}{٦}$ ٢ =$\frac{٢٣}{٦}$ سوف يترتب عليه أن تصبح قيمة ح - ل في العمود $س_١$ = $\frac{٢٣}{٦}$ - $\frac{٢٣}{٦}$ = صفر . وحيث أن $س_١$ هي متغير غير أساس فإن ذلك يعني إمكانية تغيير الحل دون التأثير علي الربح . وهذه هي حالة وجود أكثر من حل أمثل .

٣ - من الواضح أن تغير ربح الوحدة إلي ٣ جنيه في العمود $س_١$ سوف يترتب عليه أن قيمة ح - ل في العمود $س_١$ = ٣ - $\frac{٢٣}{٦}$ = - $\frac{١}{٦}$ وهي ما زالت قيمة سالبة . ويعني ذلك أن الحل الأمثل

الحالي هو الحل الأمثل الجديد أيضاً . فكل القيم في الصف الأخير ما زالت قيماً صفرية أو سالبة .

ويهمنا هنا الإشارة إلي أن نفس القواعد الثالثة السابقة صحيحة في حالة تقليل التكايف أيضاً . كما أن الذي يهمنا هو حالة تخفيض تكلفة إنتاج الوحدة من المتغيرات غير الأساسية . وذلك لأن الزيادة في تكلفة الوحدة لا تغير الحل الأمثل . ويمكن صياغة هذه القواعد علي النحو التالي :

١ - إذا كان الإنخفاض في تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسي >

(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن الحل الحالي سوف يتغير إلي حل جديد يدخل فيه هذا المتغير الحل .

٢ - إذا كان الإنخفاض في تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسي =

(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن الحل الحالي سوف يظل حلاً أمثل بالإضافة إلي ظهور أكثر من حلاً أمثل .

٣ - إذا كان الإنخفاض في تكاليف الوحدة للمتغير الغير أساسي <

(معامل المتغير في الصف الأخير)

فإن الحل الحالي سوف يبقي كما هو حلاً أمثل .

(ب) التغيير في مساهمة الوحدة لأحد المتغيرات الأساسية :

نظراً لأن ربح (تكلفة) الوحدة من المتغيرات الأساسية والموجودة في العمود الأول لجدول السمبلكس يستخدم في حساب الصف ل وبالتالي الصف (ح - ل) لكل من أعمدة المتغيرات الأساسية وغير الأساسية . فإن أي تغيير في قيمها سوف يؤدي إلي تغيير في قيم (ح - ل) للمتغيرات غير الأساسية . (لاحظ هنا أن (ح - ل) للمتغيرات الأساسية لن تتأثر لأنها دائماً صفر في جدول الحل الأمثل) . ومن المؤكد أن مقدار هذا التغيير يتوقف علي معاملات أعمدة تلك المتغيرات الغير أساسية . لأن تحديد قيمة ل لكل عمود غير أساسي يتم عن طريق ضرب قيم ربح الوحدة من المتغيرات الأساسية في المعاملات الموجودة في أعمدة المتغيرات غير الأساسية .

وبناء علي ذلك من المحتمل أن نواجه أربعة حالات عند تغيير معامل أحد المتغيرات الأساسية :

التغيير للوحدة	عمود المتغير غير الأساسي	
	به معاملات موجبة	به معاملات سالبة
زيادة في مساهمة الوحدة	يصبح المتغير غير مرغوب أكثر	يصبح المتغير مرغوب أكثر
تخفيض في مساهمة الوحدة	يصبح المتغير مرغوباً أكثر	يصبح المتغير غير مرغوب أكثر

فإذا أصبح المتغير الغير أساسي غير مرغوب أكثر ، فإنه سوف يظل متغيراً غير أساسياً . ويعني ذلك ، أن الحل الأمثل الحالي سوف

يظل كما هو حتي بعد زيادة مساهمة الوحدة للمتغير الأساسي . وبالتالي فإننا أساساً نهتم بحالة أن يصبح المتغير الغير أساسي متغيراً مرغوباً أكثر لأننا في هذه الحالة قد نغير الحل الأمثل الحالي . ويعني ذلك تفصيلاً :

١ - عند زيادة مساهمة الوحدة للمتغير الأساسي فيجب علينا أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التي لها معاملات سالبة في صف ذلك المتغير الأساسي .

٢ - عند تخفيض مساهمة الوحدة للمتغير الأساسي فيجب علينا أن نفحص فقط المتغيرات الغير أساسية التي لها معاملات موجبة في صف ذلك المتغير الأساسي .

ومثال ذلك ... في جدول السمبلكس النهائي الخاص بشركة الأثاث .

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س٢	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

بفرض أن ربح الوحدة من س ١ قد إرتفع إلي ١٢ جنيه فإننا يجب أن نفحص فقط إحتمال أن ندخل ع ٢ في الحل . أما إذا إنخفض ربح الوحدة من س إلي ٧ جنيهات فإننا يجب أن نفحص فقط إحتمال أن تدخل ع ١ في الحل . كذلك فإن إرتفاع ربح الوحدة من س ٢ إلي ١١ جنيه يقضي أن نفحص أثر إدخال ع ١ في الحل ، وعند إنخفاض ربح الوحدة من س ٢ إلي ٦ جنيهات فإننا يجب أن نفحص إحتمال إدخال ع ٢ في الحل .

والسؤال الآن : هل سوف يؤدي التغير في مساهمة الوحدة من المتغير الأساسي إلي تغير دائماً في الحل الأمثل ؟ بمعني آخر هل هناك مدي ممكن أن تقع فيه قيمة مساهمة الوحدة ويظل الحل الأمثل كما هو؟ الإجابة نعم ... ولنأخذ مثال علي كيفية تحديد هذا المدي .

بفرض أن ربح الوحدة من س ١ قد زاد إلي (١٠ + Δ) فعليا الآن أن نفحص المتغير الغير أساس ع ٢ حسب القاعدة السابقة . ويكون ذلك بحساب ل ، ح - ل الجديدة لهذا المتغير كما يلي :

$$\text{ل} = (١٠ + \Delta)\left(-\frac{١}{٣}\right) + ٩\left(\frac{٥}{١٢}\right)$$

$$= \frac{٥}{١٢} - \frac{١}{٣}\Delta$$

$$\text{، ح} - \text{ل} = \text{صفر} - \left(\frac{٥}{١٢} - \frac{١}{٣}\Delta\right)$$

$$= \frac{١}{٣}\Delta - \frac{٥}{١٢}$$

وإذا أردنا ألا يتغير الحل الأمثل الحالي فإن القيمة المحسوبة للعمود ع $_٢$ الجديدة يجب ألا تكون رقماً موجبا ويعني ذلك رياضياً :

$$\frac{١}{٣} \Delta - \frac{٥}{١٢} \geq \text{صفر}$$

ومنها $\frac{١}{٣} \Delta \geq \frac{٥}{١٢}$

$$٤ \Delta \geq ٥$$

$$\Delta \geq \frac{٥}{٤} \qquad \text{———————} \quad (١)$$

ويعني ذلك أن الحد الأقصي للزيادة والذي يجعل الحل الأمثل الحالي لا يتغير هو $\frac{٥}{٤}$ ، فإذا زاد ربح الوحدة بمقدر $\frac{٥}{٤}$ فإن الصف (ح - ل) للمتغير ع $_١$ سوف يصبح صفراً . ويعني ذلك عدم تغير الحل الأمثل الحالي ولكن مع وجود أكثر من حل أمثل . أما زيادة الربح للوحدة بما هو أكثر من $\frac{٥}{٤}$ فسوف تؤدي إلي تغيير الحل الأمثل الحالي .

وبفرض أن ربح الوحدة من س $_١$ قد إنخفض إلي (١٠ - Δ) فعلينا الآن أن نفحص المتغير الغير أساسي ع $_١$ حسب القاعدة السابقة.

ويكون ذلك بحساب ل ، ح - ل الجديدة لهذا المتغير كما يلي :

$$ل = (١٠ - \Delta) \frac{١}{٣} + ٩ (- \frac{١}{٦})$$

$$= \frac{١١}{٦} - \frac{١}{٣} \Delta$$

ومنها ح - ل = صفر - ($\frac{١١}{٦} - \frac{١}{٣}\,\Delta$)

$$\frac{١١}{٦} - \Delta\,\frac{١}{٣} =$$

وحتي يظل ع $_{١}$ خارج الحل فإن :

$$\text{صفر} \geq \frac{١١}{٦} - \Delta\,\frac{١}{٣}$$

$$\frac{١١}{٦} \geq \Delta\,\frac{١}{٣}$$

$$١١ \geq \Delta\;٢$$

$$\frac{١١}{٢} \geq \Delta \qquad \text{———— (٢)}$$

ويعني ذلك أن الحد الأقصي للتخفيض والذي يجعل الحل الأمثل الحالي لا يتغير هو $\frac{١١}{٢}$.

ومن (١) ، (٢) يمكن تحديد مدي ربح الوحدة من المتغير س $_{١}$ والذي إذا وقع فيه ربح وحدة س $_{١}$ لا يؤثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي، كما يلي :

الحد الأعلي لمساهمة الوحدة = ١٠ + $\frac{٥}{٤}$ = $\frac{٥}{٤}$ ١٠ جنيه .

الحد الأدني لمساهمة الوحدة = ١٠ - $\frac{١١}{٢}$ = $\frac{١}{٢}$ ٤ جنيه .

وبنفس الإجراءات يمكن تحديد مدي ربح الوحدة من المتغير س $_{٢}$ والذي إذا وقع فيه ربح الوحدة من س $_{٢}$ لا يوثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي ، وسوف نجد أنه :

الحد الأعلي لمساهمة الوحدة = ٩ + ١١ = ٢٠ جنيه .

الحد الأدني لمساهمة الوحدة = ٩ − ١ = ٨ جنيه .

واضح من هذا المثال أن الإجراء يعد بسيطاً نسبياً ، ويرجع ذلك أساساً إلي أن هذا المثال المحدود به متغيرين أساسين فقط . أما في حالة وجود أكثر من متغيرين ، فلتحديد قيمة Δ يجب وضع الشروط الخاصة بكل صف إلي جوار بعضها البعض لتحديد قيمة Δ التي تحقق جميع الشروط معاً . ويمكن وضع هذا الإجراء لعام في شكل رياضي بإستخدام الرموز التالية :

$ح_{ن}$ = ربح الوحدة للمتغير الأساسي النوني في جدول الحل النهائي الحالي

$(ل - ح)_{د}$ = القيمة في الصف الأخير للمتغير الغير أساسي الدالي

$ا_{ن د}$ = المعامل الموجود في صف المتغير الأساسي النوني وعمود المتغير الغير أساسي الدالي.

حيث ن = ١ ، ٢ ، ... ، عدد المتغيرات الأساسية

د = ١ ، ٢ ، .... ، عدد المتغيرات الغير أساسية

فإن الحد الأدني لرقم مساهمة الوحدة في المتغير الأساسي :

أكبر القيم (ربح الوحدة + قيمة الصف الأخير للمتغير غير الأساسي) لكل المتغيرات الغير أساسية > صفر
= من بين (للمتغير الأساسي + ――――――――――――)
المعـــامل عند $ا_{ن د}$

$$= \text{أكبر} \left(ح_{ن} - \frac{(ل - ح)_{د}}{أ_{ن د}} \right) \text{ لكل المتغيرات الغير أساسية } > \text{ صفر عند } أ_{ن د}$$

وكذلك فإن الحد الأقصي لرقم مساهمة الوحدة في المتغير الأساسي :

$$= \text{أقل القيم من بين} \left(\text{ربح الوحدة للمتغير الأساسى} + \frac{\text{قيمة الصف الأخير للمتغير غير الأساسى}}{\text{المعـــامل}} \right) \text{ لكل المتغيرات الغير أساسية } < \text{ صفر عند } أ_{ن د}$$

$$= \text{أقل} \left(ح_{ن} - \frac{(ل - ح)_{د}}{أ_{ن د}} \right) \text{ لكل المتغيرات الغير أساسية } < \text{ صفر عند } أ_{ن د}$$

ولنأخذ الآن مثالاً به ثلاثة متغيرات أساسية كما في جدول السمبلكس النهائي التالي :

ح			٥	١٢	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	$س_1$	$س_2$	$ع_1$	$ع_2$	$ع_3$
صفر	$ع_1$	١٠	صفر	صفر	١	− ١	٢
٥	$س_1$	١٦	١	صفر	صفر	$\frac{4}{5}$	$-\frac{8}{5}$
١٢	$س_2$	١٥	صفر	١	صفر	صفر	١
ل		٢٦٠	٥	١٢	صفر	٤	٤
ل − ح			صفر	صفر	صفر	− ٤	− ٤

والمطلوب : تحديد الحد الأدني والأعلي للمتغير $س_1$

الحـل :

حيث أن $ا_{ن د}$ الموجب الوحيد هو $\frac{٤}{٥}$ في أعمدة المتغيرات الغير أساسية في صف $س_١$ فإن الحد الأدني :

$$= (٥ + \frac{-٤}{\frac{٤}{٥}}) = \text{صفر}$$

وكذلك فإن $ا_{ن د}$ السالب الوحيد هو $-\frac{٨}{٥}$ في أعمدة المتغيرات الغير أساسية في صف $س_١$ فإن الحد الأعلي :

$$= (٥ + \frac{-٤}{-\frac{٨}{٥}}) = ٥ + \frac{١}{٢}٢ = \frac{١}{٢}٧$$

ويعني ذلك أي قيمة لربح الوحدة من المتغير $س_١$ بين صفر، $\frac{١}{٢}٧$ سوف لا تؤدي إلي تغيير الحل الأمثل الحالى .

ثالثاً : التغير في معاملات القيود :

ويقصد بذلك تغير عدد الوحدات اللازمة من كل مورد لكل وحدة من المتغيرات . ويعبر عنها بالمعاملات التكنولوجية Technological Coefficients ، نظراً لأن قيمها تكون محكومة إلي حد كبير بنوع التكنولوجيا المستخدمة . ويحدث كثيراً أن تتغير هذه المعاملات نظراً لتغير نوع الآلات أو الأفراد أو لتغير المزيج المستخدم من كل من الالات والأفراد . وفي هذه الحالة يهتم متخذ القرار بتأثير هذا التغير علي الحل الأمثل .

يتوقف هذا التأثير علي ما إذا كان المعامل خاص بمتغيراً غير أساسياً أم يخص متغيراً أساسياً .

(أ) التغير في معامل متغير غير أساسي :

إذا تغير المعامل الخاص بأحد المتغيرات الغير أساسية في أحد القيود في المشكلة الأصلية فإن ذلك لن يؤثر علي الوصول إلي الحل النهائي الذي توصلت إليه قبل التغيير ، بمعني أن الحل المثالي السابق سوف يكون دائماً حلاً ممكناً (وليس بالضرورة أمثل) بعد التغيير . وطالما أن هذا المتغير هو متغيراً غير أساسياً فيجب التأكد من أثر التغيير في المعامل علي الرقم الموجود في الصف قبل الأخير الخاص بهذا المتغير . فإذا أصبح رقماً موجباً فإن ذلك يعني أن الحل الحالي (الذي كان أمثلاً والذي هو ممكن) ليس حلاً أمثل ويجب عمل خطوة أخري للوصول إلي الحل الأمثل .

ولذلك فإننا يمكننا مبدئياً تحديد أثر التغير علي الحل الحالي كما يلي :

في جدول السمبلكس النهائي التالي :

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	س$_{٣}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$	ع$_{٣}$
٤	س$_{٢}$	٦ ٢/٣	١/٣			١/٣		
٣	س$_{٣}$	١٦ ٢/٣	٥/٦			- ١/٦		
صفر	ع$_{٣}$	٢٦ ٢/٣	- ٥/٣			- ٢/٣		
ل		٧٦ ٢/٣	٢٣/٦	٤	٣	٥/٦	٢/٣	صفر
ح - ل			- ١١/٦	صفر	صفر	- ٥/٦	- ٢/٣	صفر

* لا تحتاج إلي القيم الغير واردة بالجدول لأنها سوف لا تتغير.

بفرض أن القيد الأول ٣ س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ ≥ ٦٠. الخاص بهذه المشكلة قد تغير إلي ٥ س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ + ٢ س$_{٣}$ ≥ ٦٠

فإن التغير الذي سوف يطرأ علي جدول الحل النهائي الجديد يمكن حسابه بإستخدام العمود ع$_{١}$ والعمود س$_{١}$ وذلك علي أساس أن:

Δ = ٥ - ٣ = ٢ = مقدار التغير في المعامل .

الصف	المعاملات القديمة في العمود س ١	المعاملات في العمود ع ١	المعاملات الجديدة في العمود س ١
س ٢	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣} + ٢ (\frac{١}{٣}) = ١$
س ٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٦} - ٢ (\frac{١}{٦}) = \frac{٣}{٦}$
ع ٢	$-\frac{٥}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣} - ٢ (\frac{٢}{٣}) = -٣$

وبذلك يصبح الجدول الجديد هو :

ح			٢	٤	٣	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س ١	س ٢	س ٣	ع ١	ع ٢	ع ٣
٤	س ٢	$٦\frac{٢}{٣}$	١			$\frac{١}{٣}$		
٣	س ٣	$١٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{١}{٢}$			$-\frac{١}{٦}$		
صفر	ع ٣	$٢٦\frac{٢}{٣}$	-٣			$-\frac{٢}{٣}$		
ل		$٧٦\frac{٢}{٣}$	$\frac{١١}{٢}$	٤	٣	$\frac{٥}{٦}$	$\frac{٢}{٣}$	صفر
ح − ل			$-\frac{٧}{٢}$	صفر	صفر	$-\frac{٥}{٦}$	$-\frac{٢}{٣}$	صفر

ويلاحظ علي هذا الجدول أن الحل القديم لم يتغير ويعني ذلك أن هذا الحل هو حلاً ممكناً feasible . كذلك فإن التغير الوحيد هو التغير في معاملات العمود الخاص بالمتغير الغير أساسي س ١ . لاحظ الآن

أننا قلنا أن هذا الحل الحالي ممكناً ولم نقل أمثل . وللتأكد من أنه أمثل يجب أن نحسب قيمة (ح - ل) الجديدة لمتغير $س_{١}$ في الجدول الأخير . وهي :

$$٢ - (٤ \times ١ + ٣ \times \frac{١}{٢} + \text{صفر}) = - ٣\frac{١}{٢}$$

وهي رقماً سالباً وذلك يعني أن الحل الأمثل السابق لم يتغير والحل الجديد هو تماماً الحل القديم . ولكن ذلك لا يعني دائماً أن الحل الأمثل الجديد بعد التغير سوف يظل كما هو . ولذلك يأتي السؤال الهام المشابه لمعظم تحليلات الحساسية السابقة : ما هو المدي الذي يمكن أن تقع فيه قيمة المعامل لأحد المتغيرات غير الأساسية دون أن يؤثر ذلك علي الحل الأمثل ؟

للإجابة علي هذا يمكن التعويض عن (٥ - ٣) بالقيمة Δ حتي تعبر عن قيمة التغير بشكل عام ، وبذلك فإن القيد الأول

$$٣ س_{١} + ٤ س_{٢} + ٢ س_{٣} \le ٦٠$$

سوف يصبح

$$(٣ + \Delta) س_{١} + ٤ س_{٢} + ٢ س_{٣} \le ٦٠$$

والقيم الجديدة في عمود المتغير $س_{١}$ في الجدول الجديد سوف تصبح :

الصف	المعاملات القديمة في العمود $س_١$	المعاملات في العمود $ع_١$	المعاملات الجديدة في العمود $س_١$
$س_٢$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}\Delta$
$س_٣$	$\frac{٥}{٦}$	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta$
$ع_٢$	$-\frac{٥}{٣}$	$-\frac{٢}{٣}$	$-\frac{٥}{٣} - \frac{٢}{٣}\Delta$

ومنها يمكن حساب ل ، ح − ل الخاصة بالعمود $س_١$

$$ل = ٤\left(\frac{١}{٣} + \frac{١}{٣}\Delta\right) + ٣\left(\frac{٥}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta\right) + \text{صفر}$$

$$= \frac{٢٣}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta$$

$$ح - ل = ٢ - \left(\frac{٢٣}{٦} - \frac{١}{٦}\Delta\right)$$

$$= -\frac{١١}{٦} + \frac{١}{٩}\Delta$$

فإذا رغبنا في ألا يتغير الحل الأمثل الحالي فإن الشرط هو :

$$\frac{١}{٦}\Delta - \frac{١١}{٩} \leq \text{صفر}$$

$$\frac{١}{٩} \leq \frac{١١}{٦}$$

ويعني ذلك $\Delta \leq ١١$

وطالما أن القيمة الجديدة للمعامل $= ٣ + \Delta$

Δ = القيمة الجديدة - ٣

فإن (القيمة الجديدة - ٣) ≥ ١١

∴ القيمة الجديدة ≥ ١٤

ويعني ذلك أنه طالما أن القيمة الجديدة للمعامل الخاص بالمتغير س ١ في القيد الأول ≥ ١٤ فإن الحل الأمثل الحالي سوف لا يتغير بسبب تغير قيمة المعامل . أما إذا أصبح المعامل الجديد أكبر من ١٤ فإن (ح - ل) سوف تصبح رقماً موجباً ويعني ذلك أن الحل السابق ليس هو الحل الأمثل ، ويجب عمل خطوة واحدة إضافية عليه هدفها إدخال س ١ في الحل للوصول إلي الحل الأمثل الجديدة .

(ب) التغير في معامل متغير أساسي :

يعد تحليل أثر التغير في معامل أحد المتغيرات الأساسية في أحد القيود أكثر صعوبة وتعقيداً من كل الحالات السابقة . ويرجع ذلك إلي خاصية أساسية وهي أن قيمة المتغير الأساسي في جدول السمبلكس النهائي تكون قيمة موجبة وعلي ذلك فإن تغير المعامل الخاص بها سوف يكون له تأثير ما علي قيم المتغيرات الأساسية الأخري في الحل النهائي . ويترتب ذلك أن الحل الجديد يجب التأكد من أنه ممكناً feasibility كما يجب التأكد أنه ما زال حلاً أمثل optimality .

والخطوة الأولي ، هي أن نحسب المعاملات الجديدة للمتغير

الأساسي الذي يتغير معامله بنفس الطريقة التي قمنا بها في حالة المتغير الغير أساسي . دعنا نأخذ مثال حتي يمكن إيضاح ذلك :

في جدول السمبلكس النهائي الخاص بمكشلة الأثاث التالي :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س$_١$	س$_٢$	ع$_١$	ع$_٢$
١٠	س$_١$	٢٠	١	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س$_٢$	٥	صفر	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ل		٢٤٥	١٠	٩	$\frac{١١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{١١}{٦}$	$-\frac{٥}{١٢}$

بفرض أن القيد الأول ٥ س$_١$ + ٤ س$_٢$ ≥ ١٢٠

قد تغير إلي ٦ س$_١$ + ٤ س$_٢$ ≥ ١٢٠

والمطلوب : إيضاح أثر ذلك علي الحل الأمثل الحالي .

لتحديد أثر ذلك نبدأ بتحديد معاملات المتغير س$_١$ في عمود س$_١$ في جدول السمبلكس الأخير كما يلي :

الصف	المعاملات القديمة في العمود س$_١$	المعاملات في العمود ع$_١$	المعاملات الجديدة في العمود س$_١$
س$_١$	١	$\frac{١}{٣}$	١ + $\frac{١}{٣}$ (١) = $\frac{٤}{٣}$
س$_٢$	صفر	$-\frac{١}{٣}$	صفر - $\frac{١}{٣}$ (١) = $-\frac{١}{٣}$

وذلك علي أساس أن Δ = ٦ - ٥ = + ١

ويذلك فإن الجدول التالي الجديد يكون :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س ١	س ٢	ع ١	ع ٢
١٠	س ١	٢٠	$\frac{٤}{٣}$	صفر	$\frac{١}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$
٩	س ٢	٥	$-\frac{١}{٣}$	١	$-\frac{١}{٦}$	$\frac{٥}{١٢}$

ولكن هذا الجدول لا يحقق شرط المتغير الأساسي الذي يجب أن يكون عموده أحد مكونات أعمدة مصفوفة الوحدة . ولذلك نقوم بعمل تغيير بإستخدام بعض العمليات الرياضية من شأنه أن يجعل العمود س ١ به (١) ، (صفر) في الصف الأول والثاني علي التوالي .

وتكون نتيجته ما يلي :

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س ١	س ٢	ع ١	ع ٢
١٠	س ١	١٥	١	صفر	$\frac{١}{٤}$	$-\frac{١}{٤}$
٩	س ٢	١٠	صفر	١	$-\frac{١}{١٢}$	$\frac{١}{٣}$
ل		٢٤٠	١٠	٩٠	$\frac{٢١}{١٢}$	$\frac{٦}{١٢}$
ح - ل			صفر	صفر	$-\frac{٢١}{١٢}$	$-\frac{٦}{١٢}$

وباختيار مثالية الحل يتضح أن ذلك هو حلاً أمثل وفيه :

$س_{١} = ١٥$

$س_{٢} = ١٠$

$ع_{١} =$ صفر

$ع_{٢} =$ صفر

وربح الحل الأمثل = ٢٤٠

الثنـــــــائية

Duality

(الوجه الآخر لمشكله البرمجة الخطية)

يعني لفظ الثنائية في مجال البرمجة الخطية أن كل مشكلة برمجة خطية يمكن صياغتها رياضياً بطريقتين . أما الأولي فهي الطريقة المعتادة التي ذكرناها في الأجزاء السابقة ، والتي عادة ما يطلق عليها الطريقة الأصلية primal . والثانية هي الوجه الآخر للصياغة الأولية والتي يطلق عليها الصيغة الثنائية dual . التي تفضل أن يطلق عليها في اللغة العربية صياغة الوجه الاخر . ويرجع ذلك إلي أننا نبدأ عادة بالصيغة الأصلية ثم نصل إلي صياغتها علي الوجه الآخر . فكل صياغة أصلية يمكن صياغتها علي الوجه الآخر . ومثال ذلك ، أن كل مشكلة تعظيم لربح يمكن صياغتها كمشكلة لتقليل التكاليف . كما أن مشكلة تقليل التكاليف يمكن النظر إليها علي أنها مشكلة تعظيم كفاءة إستخدام الموارد المتاحة . وعلي العموم سوف نستخدم إصطلاحي الثنائية والوجه الآخر للتعبير عن ذات الشيء .

ولقد تناولنا في الفصول السابقة عملية الوصول إلي الحل الأمثل للصياغة الأصلية . وطالما أن ذات المشكلة يمكن صياغتها علي وجه آخر dual فإن الحل الذي نصل إليه لحل الصيغة الثنائية dual يكون هو ذات الحل الذي نصل إليه بحل الصيغة الأصلية . فالأمر هو مجرد إختلاف في طريقة الصياغة . كذلك فإن المشكلة التي تصاغ علي

الوجه الآخر ، إذا تم صياغتها حسب الوجه الآخر لذلك الوجه الآخر dual of a dual سوف تكون هي بالتمام الصياغة الأصلية primal . فكأنك قمت بقلب نفس العملة مرتين .

ويتبادر إلي الذهب الآن التساؤل حول الأسباب التي قد تدعو إلي إستخدام عملية الصيغة الثنائية عند حل مشكلة البرمجة الخطية. هناك سببين رئيسيين لذلك هما (أ) أن مشكلة الثنائية تقدم بيانات ذو أهمية خاصة عند عمل التحليل الإقتصادي لمشكلة البرمجة الخطية، و (ب) تستلزم مشكلة الثنائية عند حلها خطوات رياضية أقل تعقيداً من الخطوات اللازمة لحل الصيغة الأصلية للمشكلة . ويرجع ذلك إلي إنخفاض عدد جداول السمبلكس اللازمة قبل الوصول إلي الحل الأمثل كما سنري في الأمثلة القادمة .

العلاق بين الصياغة الأصلية وصياغة الوجه الآخر :

لإيضاح تلك العلاقة يجب أن نبدأ بمثال :

مثـــال :

بإستخدام الصياغة الأصلية التالية لمشكلة الأثاث في المثال (١ - ١) .

عظم ز = ١٠ س$_{١}$ + ٩ س$_{٢}$

في ظل القيود ٥ س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ ≥ ١٢٠

٢ س$_{١}$ + ٤ س$_{٢}$ ≥ ٦٠

$\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ≤ صفر

ضع صياغة الوجه الآخر الممكنة لهذه المشكلة .

الحــــل :

صياغة الوجه الاخر (الصيغة الثنائية) هي :

قلل ت = ١٢٠ $\text{ص}_{١}$ + ٦٠ $\text{ص}_{٢}$

القيود ٥ $\text{ص}_{١}$ + ٢ $\text{ص}_{٢}$ ≤ ١٠

٤ $\text{ص}_{١}$ + ٤ $\text{ص}_{٢}$ ≤ ٩

$\text{ص}_{١}$ ، $\text{ص}_{٢}$ ≤ صفر

ويلاحظ علي هذه الصياغة ما يلي :

١ - إن دالة الهدف الجديدة في صيغة الوجه الآخر هي دالة تقليل تكاليف نظراً لأن دالة الهدف الأصلية هي دالة تعظيم ربح . وعلي ذلك فإن دالة الهدف الجديدة تكون دائماً عكس دالة الهدف الأصلية .

٢ - إن عدد القيود اللازمة في الصيغة الثنائية يعادل تماماً عدد المتغيرات الموجودة في الصيغة الأصلية . فقد كان لدينا متغيرين $\text{س}_{١}$ ، $\text{س}_{٢}$ ولذلك يصبح لدينا قيدين فقط في الصيغة الثنائية . وعلي ذلك إذا بدأنا في الصياغة الأصلية بثلاث

متغيرات فإن عدد القيود في الصيغة الثنائية يجب أن يكون ثلاثة حتي إذا كان عدد القيود في الصياغة هو إثنين فقط .

٣ - إن عدد المتغيرات اللازمة في الصيغة الثنائية يعادل تماماً لعدد القيود الموجودة في الصيغة الأصلية . فالمتغيرات الجديدة في صيغة الوجه الآخر هي ص $_١$ ، ص $_٢$ نظراً أن الصياغة الأصلية بها قيدين فقط . ويمكن تعريف هذه المتغيرات علي النحو التالي :

ص $_١$ = القيمة الحدية لوحدة واحدة من الأخشاب المتاحة للإستخدام .

ص $_٢$ = القيمة الحدية لساعة واحدة من ساعات العمل المتاحة للإستخدام .

٤ - إن قيم مساهمة الوحدة في دالة الهدف الجديدة للمتغيرات الجديدة ص $_١$ ، ص $_٢$ هي بالتمام إجمالي الموارد المتاحة من كل عنصر والموجودة في الطرف الأيسر من القيود حسب الصياغة الأصلية . وهما ١٢٠ ، ٦٠ علي التوالي .

٥ - الطرف الأيسر من متباينات القيود في الصياغة الثنائية هي تماماً قيم مساهمة الوحدة في دالة الهدف في الصياغة الأصلية للمشكلة . وهما ١٠ ، ٩ علي التوالي .

٦ - قيم المعاملات الموجودة في القيود حسب الصياغة الأصلية يتم إستخدامها ولكن بعد عكس المصفوفة . ويعني ذلك أن الصف

الأول (الطرف الأيمن من القيد) في الصياغة الثنائية يستخدم القيم الموجودة في العمود الأول في الصياغة الأصلية . ويستخدم الصف الثاني (الطرف الأيمن من القيد الثاني) في الصيغة الثنائية نفس القيم الموجودة في العمود الثاني في الصياغة الأصلية ، وهكذا .

معني الصياغة الجديدة :

بتأمل القيد الأول في صيغة الثنائية نجد أن الجانب الأيمن يعبر عن إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في إنتاج وحدة واحدة من السلعة الأولي س ١ . حيث أن الوحدة الواحدة من س ١ تستلزم خمسة وحدات من الأخشاب والتي تبلغ القيمة الحدية للوحدة منها ص ١ ، كما تستلزم أيضاً وحدتين من ساعات العمل والتي تبلغ القيمة الحدية للوحدة منها ص ٢ . أما الجانب الأيسر فهو يعبر عن ربح الوحدة من السلعة الأولي وهو ١٠ جنيهات . وعلي ذلك فإن القيد الأول يضع قيداً علي إنتاج س ١ . فلا نبدأ في إنتاجها إلا إذا كان إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في إنتاج الوحدة منها يعادل أو يقل عن الربح الممكن تحقيقه من الوحدة .

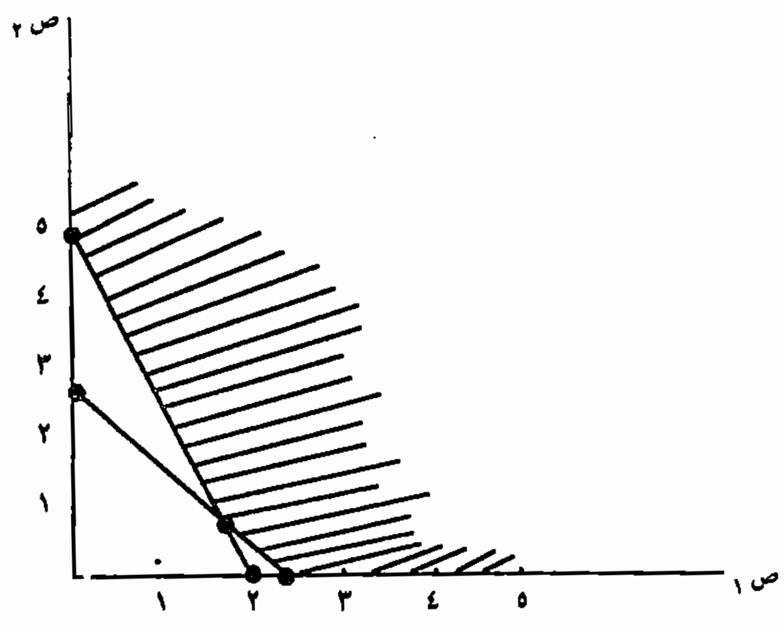
وبنفس المنطق فإن الوحدة الواحدة من السلعة س ٢ سوف تستلزم موارد تكلفتها المستخدمة الإجمالية هي ٤ ص ١ + ٤ ص ٢ . ويعني القيد الثاني ألا يتم إنتاج وحدة من السلعة الثانية ألا إذا كانت

التكلفة الإجمالية للموارد المستخدمة في إنتاجها تقل عن أو تساوي ربح الوحدة المتوقع وهو ٩ .

أما دالة الهدف في الصياغة الثنائية فإنها تهدف إلي تقليل إجمالي تكلفة الموارد المستخدمة في الإنتاج ككل . فالجزء الأول منها يعبر عن عدد الوحدات المتاحة من الأخشاب مضروباً في القيمة الحدية للوحدة . وبالتالي فهو يعبر عن إجمالي تكلفة الأخشاب . كذلك فإن الجزء الثاني يعبر عن إجمالي تكلفة العمالة .

حل الصيغة الثنائية بيانياً :

بإستخدام الأسلوب البياني المعتاد للبرمجة الخطية يمكن الوصول إلي الحل الأمثل للصيغة الجديدة علي النحو التالي :



نقط التقاطع الركنية	التكاليف حسب دالة الهدف	
صفر ، ٥	٣٠٠	
$\frac{١١}{٩}$ ، $\frac{٥}{١٢}$	٢٤٥	الحل الأمثل
$٢\frac{١}{٤}$ ، صفر	٢٧٠	

وبتأمل هذا الحل نجد أن التكلفة التي تعبر عن أقل تكلفة ممكنة وهي ٢٤٥ جنيهاً تعادل تماماً الربح الأمثل المحقق في حالة حل المشكلة الأصلية بإستخدام الرسم البياني فيما سبق .

حل الصيغة الثنائية بإستخدام أسلوب السمبلكس :

يمكن حل مشكلة الثنائية بإستخدام السمبلكس بعد إضافة متغيرات العطل والمتغيرات الوهمية علي النحو التالي :

$$ت = ١٢٠ ص_{١} + ٦٠ ص_{٢} + صفر ع_{١} + صفر ع_{٢} + م و_{١} + م و_{٢}$$

القيـــود :

$$٥ ص_{١} + ٢ ص_{٢} - ع_{١} + صفر ع_{٢} + و_{١} + صفر و_{٢} = ١٠$$

$$٤ ص_{١} + ٤ ص_{٢} + صفر ع_{١} - ع_{٢} + صفر و_{١} + و_{٢} = ٩$$

$$ص_{١} ، ص_{٢} ، ع_{١} ، ع_{٢} ، و_{١} ، و_{٢} \geq صفر$$

جدول السمبلكس المبدئي

		ت	١٢٠	٦٠	صفر	صفر	م	م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	ص١	ص٢	ع١	ع٢	و١	و٢
م	و١	١٠	(٥)	٢	-١	صفر	١	صفر
م	و٢	٩	٤	٤	صفر	-١	صفر	١
ت الحل ل		١٩م	٩م	٦م	-م	-م	م	م
ت - ل			١٢٠-٩م	٦٠-٦م	م	م	صفر	صفر

جدول السمبلكس الثاني

		ت	١٢٠	٦٠	صفر	صفر	م	م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	ص١	ص٢	ع١	ع٢	و١	و٢
١٢٠	ص١	٢	١	$\frac{٢}{٥}$	$-\frac{١}{٥}$	صفر	$\frac{١}{٥}$	صفر
م	و٢	١	صفر	$(\frac{١٢}{٥})$	$\frac{٤}{٥}$	-١	$-\frac{٤}{٥}$	١
ل		٢٤٠+م	١٢٠-	٤٨+$\frac{١٢}{٥}$م	$\frac{٤}{٥}$م-٤٨	-م	٤٨-$\frac{٤}{٥}$م	م
ت - ل			صفر	١٢-$\frac{١٢}{٥}$م	٤٨-$\frac{٤}{٥}$م	م	$\frac{٩}{٥}$م-٤٨	صفر

جدول السمبلكس النهائي للصيغة الثنائية

ت			١٢٠	٦٠	صفر	صفر	م	م
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	ص١	ص٢	ع١	ع٢	و١	و٢
١٢٠	ص١	١١/٦	١	صفر	- ١/٣	١/٦	١/٣	- ١/٦
٦٠	ص٢	٥/١٢	صفر	١	١/٣	- ٥/١٢	- ١/٣	٥/١٢
ل		٢٤٥	١٢٠	٦٠	- ٢٠	- ٥	٢٠	٥
ت - ل			صفر	صفر	٢٠	٥	م - ٢٠	م - ٥

وسوف نقارن نتائج هذا الجدول الأخير مع جدول السمبلكس النهائي التالي والذي توصلنا إليه عند حل الصيغة الأصلية لنفس المشكلة والذي فضلنا أن نورده هنا مرة أخري لأغراض المقارنة .

جدول السمبلكس النهائي للصيغة الأصلية

ح			١٠	٩	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	القيمة	س١	س٢	ع١	ع٢
١٠	س١	٢٠	١	صفر	١/٣	- ١/٣
٩	س٢	٥	صفر	١	- ١/٦	٥/١٢
ل		٢٤٥	١٠	٩	١١/٦	٥/١٢
ح - ل			صفر	صفر	- ١١/٦	- ٥/١٢

توضح المقارنة بين الجدولين الأخيرين ما يلي :

١ - إن قيم المتغيرات ص ١ ، ص ٢ التي تم التوصل إليها عند حل الصياغة الثنائية هي بالضبط القيم المطلقة لمعاملات المتغيرات ع ١ ، ع ٢ في الصف ح - ل من جدول حل الصيغة الأصلية . وهذه القيم هي ما أوضحنا سابقاً أنها أسعار الظل shadow prices للمتغيرات الأصلية س ١ ، س ٢ . وعلي ذلك فإن حل صياغة الثنائية يؤدي إلي الوصول إلي أسعار الظل للمتغيرات الأصلة . وهذه القيم هي $\frac{١١}{٦}$ ، $\frac{٥}{١٢}$ علي التوالي .

٢ - إن قيم المتغيرات س ١ ، س ٢ التي تم التوصل إليها عند حل الصياغة الأصلية هي بالضبط ذات القيم التي توصلنا إليها في الصف ح - ل للمتغيرات ع ١ ، ع ٢ . أي أنها أسعار الظل للمتغيرات ص ١ ، ص ٢ . وعلي ذلك فإن حل صياغة الثنائية يؤدي إلي الوصول إلي قيم المتغيرات الأصلية س ١ ، س ٢ أيضاً ولكن تظهر كأسعار ظل لمتغيرات ص ١ ، ص ٢ . وهذه القيم هي ٢٠ ، ٥ علي التوالي .

٣ - هناك علاقة بين مصفوفة المتغيرات ع ١ ، ع ٢ في جدول السمبلكس النهائي للصيغة الأصلية ومصفوفة المتغيرات ع ١ ، ع ٢ في جدول السمبلكس النهائي للصيغة الثنائية . فالصف في الأولي هو عمود في الثانية ولكن بإشارة مغايرة . فمثلاً الصف

$\frac{١}{٣}$ ، - $\frac{١}{٣}$ في الجدول الأول هو العمود - $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٣}$ في الجدول الآخر .

٤ - رقم الربح في حل الصيغة الأصلية هو ذات رقم التكاليف الذي تم التوصل إليه في حل الصيغة الثنائية . وهذه القيمة هي ٢٤٥ في الحالتين .

ويتضح من ذلك أن نفس معلومات الجدول النهائي لصيغة الثنائية يمكن الحصول عليها مباشرة من الجدول النهائي للصيغة الأصلية . ويشترط لذلك فقط تفهم العلاقة بينهما كما أوضحناها . والسؤال الأهم الآن هو ... لماذا نلجأ إلي إستخدام أسلوب الثنائية إذن إذا كانت لدينا نفس المعلومات من حل المشكلة الأصلية ؟ الإجابة تكمن في أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس dual simplex .

أسلوب الوجه الآخر للسمبلكس :

أوضحنا حتي الآن أنه عند إستخدام أسلوب السمبلكس المعتاد في حالة وجود قيود بها $\leq$ أو = فإننا يجب أن نستخدم أسلوب المتغيرات الوهمية و $_{١}$ ، و $_{٢}$ والقيمة الكبري م في عملية الصياغة والحل . ولكن هناك أسلوب آخر أكثر سهولة يمكن إستخدامه وهو لا يستلزم إضافة متغيرات وهمية وعلي الرغم من أن هذا الأسلوب يبدو مغايراً لأسلوب السمبلكس المعتاد حيث أنه يبدأ بحلاً مبدئياً فيه قيم المتغيرات من الممكن أن تأخذ قيماً سالبة ، إلا أنه يضمن أن يكون ذلك عملية مرحلية تبدأ من حلاً غير ممكناً إلي حلاً ممكناً وأمثل .

مثـال :

قلل ت = ٨ س$_{1}$ + ١٠ س$_{2}$

القيود ٣ س$_{1}$ + ٣ س$_{2}$ ≥ ٣٠

٤ س$_{1}$ + ٢ س$_{2}$ ≥ ٢٤

س$_{1}$ + ٢ س$_{2}$ ≥ ١٢

س$_{1}$ ، س$_{2}$ ≥ صفر

الحـــل :

قلل ت = ٨ س$_{1}$ + ١٠ س$_{2}$ + صفرع$_{1}$ + صفرع$_{2}$ + صفرع$_{3}$

القيود : ٣ س$_{1}$ + ٣ س$_{2}$ − ع$_{1}$ + صفرع$_{2}$ + صفرع$_{3}$ = ٣٠

٤ س$_{1}$ + ٢ س$_{2}$ + صفرع$_{1}$ − ع$_{2}$ + صفرع$_{3}$ = ٢٤

س$_{1}$ + ٢ س$_{2}$ + صفرع$_{1}$ + صفرع$_{2}$ − ع$_{3}$ = ١٢

بإهمال فرض عدم السالبية وضرب القيود في (−) يكون لدينا:

عظم − ت = − ٨ س$_{1}$ − ١٠ س$_{2}$ − صفرع$_{1}$ − صفرع$_{2}$ − صفرع$_{3}$

القيود : − ٣ س$_{1}$ − ٣ س$_{2}$ + ع$_{1}$ − صفرع$_{2}$ − صفرع$_{3}$ = −٣٠

- ٤ س$_{١}$ - ٢ س$_{٢}$ - صفر ع$_{١}$ + ع$_{٢}$ - صفر ع$_{٣}$ = -٢٤

س$_{١}$ - ٢ س$_{٢}$ - صفر ع$_{١}$ - صفر ع$_{٢}$ + صفر ع$_{٣}$ = -١٢

ويكون جدول السمبلكس المبدئي كما يلي :

ت			- ٨	- ١٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س$_{١}$	س$_{٢}$	ع$_{١}$	ع$_{٢}$	ع$_{٣}$
صفر	ع$_{١}$	- ٣٠	(- ٣)	- ٣	١	صفر	صفر
صفر	ع$_{٢}$	- ٢٤	- ٤	- ٢	صفر	١	صفر
صفر	ع$_{٣}$	- ١٢	- ١	- ٢	صفر	صفر	١
ل		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
ت - ل			- ٨	- ١٠	صفر	صفر	صفر

وبتأمل الجدول الحالي نجد أن الحل الوارد به ليس حلاً ممكناً حيث أن قيم المتغيرات قيماً سالبة ولذلك يجب تعديل هذا الحل .

لتحديد المتغير الذي يترك الحل يجب النظر إلي القيم السالبة للمتغيرات الأساسية . ونبدأ بإختيار المتغير ذو القيمة الأكثر سالبية largest negative حيث أنها عند خطأ أكبر في البعد عن الحل الممكن. وفي مثالنا هذا هي القيمة الموجودة في الصف ع$_{١}$ حيث أن القيمة هي - ٣٠ .

لتحديد المتغير الذي سوف يدخل الحل بدلاً من ع ١ يتم إستخدام عملية القسمة التالية وإختيار أقل القيم كما يلي :

المتغيرات غير الأساسية	ت - ل (١)	القيم المناظرة في صف ع ١ (٢)	(١) ÷ (٢)
عمود س ١	- ٨	- ٣	٨/٣
عمود س ٢	- ١٠	- ٣	١٠/٣

نجد أن المتغير س ١ يجب أن يدخل الحل بدلاً من ع ١ وبالتالي فإن الرقم المحور يكون هو (- ٣) .

ثم نقوم بعمل التعديلات للوصول إلي الجدول الثاني التالي :

ت			- ٨	- ١٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	س ١	س ٢	ع ١	ع ٢	ع ٣
- ٨	س ١	١٠	١	١	- ١/٣	صفر	صفر
صفر	ع ٢	١٦	صفر	٢	- ٤/٣	١	صفر
صفر	ع ٣	- ٢	صفر	(- ١)	- ١/٣	صفر	١
ل		- ٨٠	- ٨	- ٨	٨/٣	صفر	صفر
ت - ل			صفر	- ٢	- ٨/٣	صفر	صفر

وهذا ليس حلاً ممكناً ولذلك نقوم بإخراج ع ٣ من الحل .ولتحديد المتغير

المتغيرات غير الأساسية	ت - ل	القيم المناظرة في صف $ع_١$	(١) ÷ (٢)
$س_١$	- ٢	- ١	٢
$س_٢$	$-\frac{٨}{٣}$	$-\frac{١}{٣}$	٨

الذي يدخل الحل نقوم بتكرار الخطوات كما هو موضح . ومنها يتضح أن $س_٢$ يجب أن يدخل الحل وبالتالي فإن جدول السمبلكس التالي يكون هو :

ح			- ٨	- ١٠	صفر	صفر	صفر
ربح الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات	$س_١$	$س_٢$	$ع_١$	$ع_٢$	$ع_٣$
- ٨	$س_١$	٨	١	صفر	$-\frac{١}{٣}$	صفر	١
صفر	$س_٢$	١٢	صفر	صفر	- ٢	١	٢
- ١٠	$س_٣$	٢	صفر	١	$\frac{١}{٣}$	صفر	- ١
ح		- ٨٤	- ٨	- ١٠	٢	صفر	٢
ح - ل			صفر	صفر	- ٢	صفر	- ٢

وحيث أن كل قيم المتغيرات الأساسية في الحل موجبة فإن ذلك حلاً ممكناً ، وكذلك فإن كل القيم في الصف ح - ل قيماً غير موجبة وهذه مشكلة تعظيم (- ت) فإذا هذا هو الحل الأمثل .

الفصل الثاني
مشكلة النقل والتوزيع

* مشكلة النقل .
* صياغة مشكلة النقل في شكل نموذج البرمجة الخطية .
* التطور التاريخي بالأسلوب النقل .
* مزايا واستخدامات النقل .
* خطوات الحل بأستخدام أسلوب النقل .

الخطوة الأولى : وضع المشكلة فى شكل جدول النقل .

الخطوة الثانية : عمل التوازن إذا لزم الأمر .

الخطوة الثالثة : ايجاد حلا مبدئيا .

استخدام طريقة التفضيل المشترك .

أستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى .

أستخدام طريقة أقل التكاليف .

أستخدام طريقة فوجال التقريبية.

الخطوة الرابعة : اختبار مثالية الحل

طريقة السير على الحجر .

طريقة التوزيع المعدل .

الخطوة الخامسة : تعديل الحل الحالي .

* حالة عدم التوازن فى مشكلة النقل .
* حالة عدم الانتظام .
* حالة وجود اكثر من حل أمثل
* حالة عدم إمكانية إستخدام أحد المسارات .
* أمثلة محلولة.
* أسئلة للمراجعة أمثلة محلولة .
* تمارين للتدريب .

مشكلة النقل والتوزيع

يتناول هذا الفصل حالة خاصة من حالات أسلوب البرمجة الخطية ، وهى أسلوب النقل Transportation ، فعلى الرغم من أن مشكلة النقل يمكن حلها بأستخدام أسلوب السمبلكس ، إلا أن الصفات الخاصة التى تتميز بها تجعل من الأسهل أن يتم حلها عن طريق بعض الأساليب الموضوعه خصيصاً لها . وبانتهاء هذا الجزء ، نكون قد عرضنا لخطوات هذا الاسلوب وبعض تطبيقاته .

مشكلة النقل Transportation Problem

تتعلق مشكلة النقل بصفة عامة بحالة نقل كميات متجانسة Homogeneous من منتج معين من مصادر Sources متعددة بها كميات متاحة إلى مواقع Destinations مختلفة لكل منها طلب محدد ومعروف . وقد يكون الهدف من ذلك هو تخفيض تكاليف النقل إلى أقل حد ممكن . وهى الحالة الغالبة، أو تعظيـم الربح إلى أقصى حد ممكن ، كما يطبق على هذا المشكلة أيضاً اسم مشكلة التوزيع Dis-tribution Problem نظراً لأن صورتها الأصلية تعالج مشكلة توزيع المستلزمات على مواقع الانتاج أو توزيع المنتجات النهائية على مراكز التخزين أو أو مراكز التوزيع المختلفة وهو ما يعرف بالوصول إلى أفضل شبكة توزيع .

وتوضح الفقرة السابقة أن الكميات التى سوف يتم نقلها من المصادر إلى المواقع يفترض أنها جميعاً متجانسة ، وعلى ذلك فإن وصول كميات للموقع الأول من المصدر الأول مثلاً لا يختلف كثيراً عن

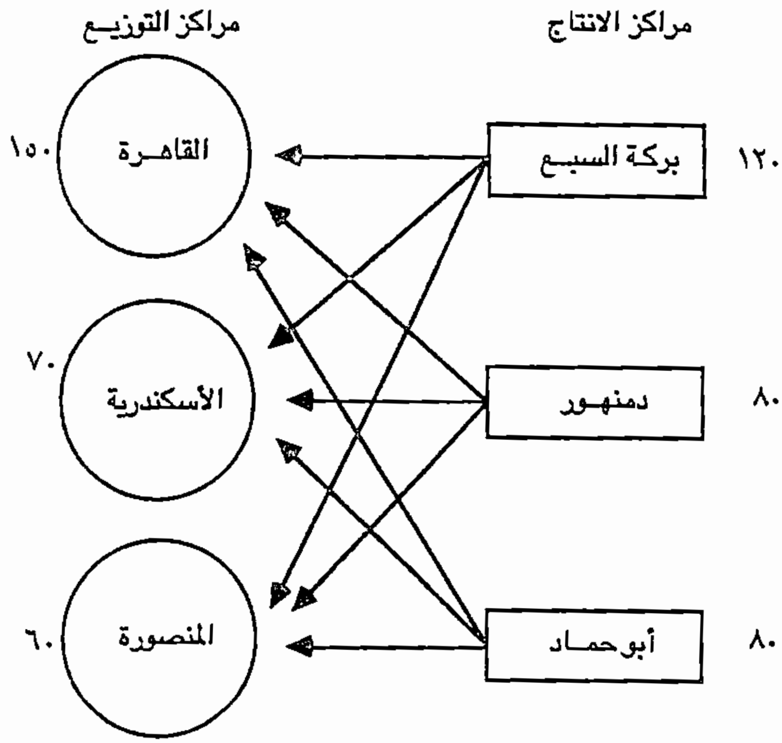
وصول الكميات إلى الموقع الأول من أى مصدر آخر توجد فيه الكميات فالوحدات الموجودة فى المصادر المختلفة متشابهة تماماً من حيث المواصفات ودرجة الجودة . كذلك يفترض أنه ليست هناك أية أنواع أخرى من القيود بالإضافة إلى قيود الكميات . والمطلوب فى مثل هذا النوع من المشاكل هو الوصول إلى تحديد للكميات الواجب نقلها من كل مصدر إلى كل موقع فى حدود الطاقة المتاحة وبشكل لا يجاوز مقدار الطلب اللازم فى كل المواقع . فعلى سبيل المثال : يفترض أن لدى أحدى شركات الطوب الأسمنتى ثلاثة مراكز أساسية يتم فيها إنتاج الطوب بطاقة إنتاجية مبينة على النحو التالى :

المصنع (المصدر)	الطاقة الانتاجية (بالألف وحدة)
بركة السبع	١٢٠
دمنهور	٨٠
أبو حماد	٨٠
إجمالى الطاقة	٢٨٠

وأن الشركة قد أرتبطت بأمداد بعض العمليات الانشائية فى كل من القاهرة ، والاسكندرية ، المنصورة بالطوب الاسمنتى اللازم لها وكان تقدير الطلب اللازم لها كما هو مبين فى الجدول التالى :

مركز التوزيع (الموقع)	الطلب اللازم (بالألف وحدة)
القاهرة	١٥٠
الأسكندرية	٧٠
المنصورة	٦٠
إجمالى الطاقة	٢٨٠

فإن هدف هذه المشكلة يكون هو الوصول إلى أفضل شبكة توزيع ، أو بمعنى آخر هو الوصول إلى تحديد لعدد الوحدات التى يتم نقلها من مصنع بركة السبع إلى مراكز التوزيع الثلاث ، وعدد الوحدات التى يتم نقلها من مصنع دمنهور إلى مراكز التوزيع الثلاث ، وعدد الوحدات التى يتم نقلها من مصنع أبو حماد إلى مراكز التوزع الثلاث ، ويتضح هذا المعنى فى الشكل (٢ ـ ١) والذى يبين أيضاً مقدار الطاقات المتاحة فى مراكز الانتاج وكذلك مقدار الطلب اللازم فى كل مركز توزيع .



شكل (٢ ـ ١)

ويهمنا هنا أن نوضح أن حل مشكلة النقل يهدف إما الى تقليل تكلفة النقل الإجمالية (وهذه هى الحالة الغالبة) أو الى تعظيم الأرباح المحققة . ويقتضى ذلك أن يكون معروفاً أيضاً تكلفة نقل الوحدة من كل مصدر إلى كل موقع . فيجب مثلاً تقدير تكلفة نقل الوحدة أو (الألف وحدة) من بركة السبع إلى القاهرة ومن دمنهور إلى القاهرة .. وهكذا . ومثال ذلك أن يكون لدينا الجدول التالى لشركة الطوب الأسمنتى والذى يوضح تكلفة نقل الألف وحدة بالجنيه بين المصادر والمواقع المختلفة :

من / ألى	القاهرة	الأسكندرية	المنصورة
بركة السبع	٨	١٠	٩
دمنهور	١٢	٥	١٥
أبو حماد	٧	١٤	٩

وبالطبع فإن تكلفة النقل هذه تتوقف على عدة عوامل منها: نوع السلع التى يتم نقلها ، والمسافة بين المصدر والموقع ، ووسيلة النقل المتاحة ، ونوع الطرق الموجودة ، ودرجة توافر الطرق الممهدة ، ودرجة توافر شحنات فى مثل هذه الأماكن تضمن أستغلال وسيلة النقل فى رحلة العودة وغيرها من العوامل الأخرى . وكذلك فإن الشركة قد تقوم بنفسها بعملية النقل دون الاعتماد على الغير . وعلى الرغم من ذلك فيجب عليها أن تقوم بتقدير تكلفة النقل وهذه واتخاذها أساسا لقرار الكميات التى يتم نقلها .

نخلص من ذلك إلى أن المشكلة التى أمامنا تستلزم تحديد الكميات الواجب نقلها من المصنع إلى مراكز التوزيع فى حدود قيود الطاقة (بالمصانع) والطلب (لمراكز التوزيع) وبشكل يضمن تقليل تكاليف النقل الأجمالية إلى أقل حدد ممكن . وكما ذكرنا فإن هذه المشكلة يمكن حلها بأستخدام أسلوب السمبلكس ولكن يفضل استخدام أسلوب النقل الذى وضع خصيصا لمعالجتها .

صياغة مشكلة النقل فى شكل نموذج البرمجة الخطية:

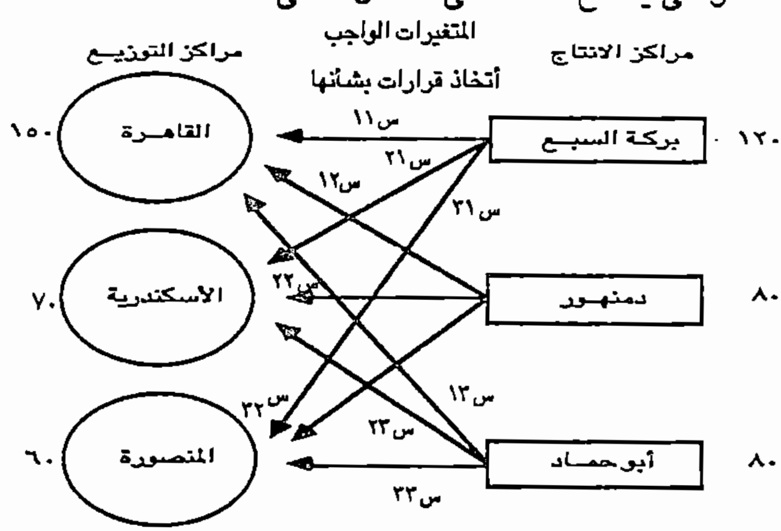
أوضحنا فيما سبق أن مشكلة النقل يمكن حلها بأستخدام أسلوب البرمجة الخطية (السمبلكس) ولذلك تكون الخطوة الأولى هى صياغة هذه المشكلة فى شكل نموذج البرمجة الخطية. ويتكون هذا النموذج من دالة الهدف والقيود الواجب أخذها فى الحسبان . ولنبدأ الآن بتحديد المتغيرات الواجب أتخاذ قرار بشأنها decision varia-bles: بفرض أن :

س $_{مك}$ = عدد الوحدات (بالألف) الواجب نقلها من المصنع م إلى مركز التوزيع ك

وذلك على أساس م = ١ ، ٢ ، ٣ للمصانع الثلاث

ك = ١ ، ٢ ، ٣ لمراكز التزيع الثلاث

والتى يتضح معناها فى الشكل التالى :



وكذلك أيضاً فى جدول النقل التالى :

من / إلى	القاهرة	الأسكندرية	المنصورة
بركة السبع	س ١١	س ٢١	س ٣١
دمنهور	س ١٢	س ٢٢	س ٣٢
أبو حماد	س ١٣	س ٢٣	س ٣٣

وبناء على هذا التعريف يمكن تحديد أولاً على أساس أنها **دالة الهدف** :

قلل تكلفة النقل الكلية = ت = ٨ س $_{١١}$ + ١٠ س $_{٢١}$ + ٩ س $_{٣١}$

+ ١٢ س $_{١٢}$ + ٥ س $_{٢٢}$ + ١٥ س $_{٣٢}$

+ ٧ س $_{١٣}$ + ١٤ س $_{٢٣}$ + ٩ س $_{٣٣}$

وذلك على أساس أن المعاملات المستخدمة فى دالة الهدف هى تكلفة نقل الوحدة (بالألف) من كل مصدر إلى مركز التوزيع ، والموضحة فى الجدول السابق .

أما الجزء الثانى من صياغة النموذج فهو **تحديد القيود الخاصة بالمشكلة** ، وهى تنقسم إلى نوعين : قيود الطاقة وقيود الطلب . ويمكن التوصل اليها كما يلى :

قيود الطاقة .. (قيود الصفوف)

س $_{١١}$ + س $_{٢١}$ + س $_{٣١}$ = ١٢٠ (طاقة مصنع بركة السبع) (١)

$س_{١٢} + س_{٢٢} + س_{٣٢} = ٨٠$ (طاقة مصنع دمنهور) (٢)

$س_{١٣} + س_{٢٣} + س_{٣٣} = ٨٠$ (طاقة مصنع أبو حماد) (٣)

قيود الطلب .. قيود الأعمدة

$س_{١١} + س_{١٢} + س_{١٣} = ١٥٠$ (الطلب فى القاهرة) (٤)

$س_{٢١} + {}_{٢٢} + س_{٢٣} = ٧٠$ (الطلب فى الاسكندرية) (٥)

$س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٣} = ٦٠$ (الطلب فى المنصورة) (٦)

أما قيد عدم السالبية فهو

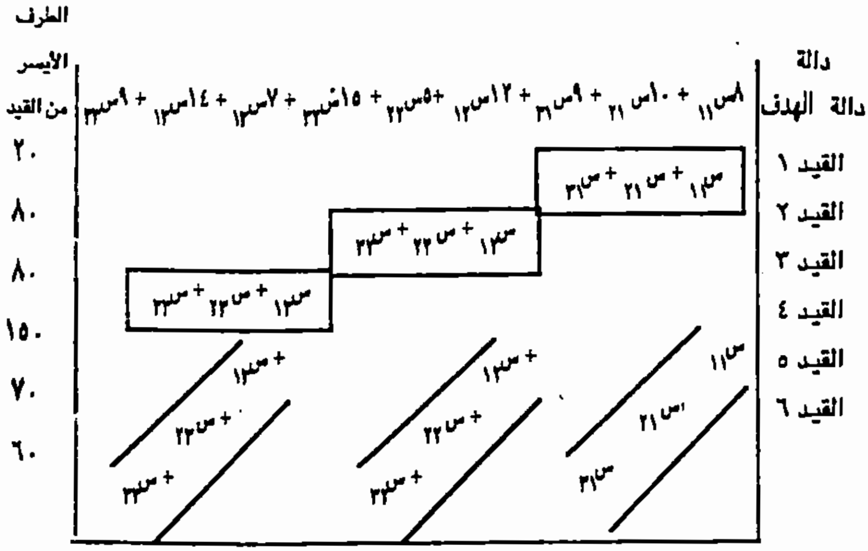
$س_{م ك}$ ≤ صفر

لكل قيم م ، ك .

وتعنى هذه القيود أن أجمالى الطاقة فى كل مصنع لا يمكن تجاوزها ، كذلك يجب الوفاء بكل الطلب اللازم لكل مركز توزيع ويرجع أستخدام الرمز = إلى أن هذه الحالة هى حالة التوازن الذى يتعادل فيها إجمالى الطلب اللازم لمراكز التوزيع مع أجمالى الطاقة المتاحة فى جميع المصانع . ويلاحظ ذلك من مجموع كل من جدول الطاقة وجدول الإحتيأجات . فالمجموع فى الحالتين هو ٢٨٠ وحدة . (وسوف نناقش حالة عدم التوازن فيما بعد) .

ويعنى ذلك أن اسخدام علامة = يضمن تلقائياً تحقق شرط التوازن .

ويمكننا الآن ان نوضح الشكل الخاص الذى تأخذه مشكلة النقل عند وضع هذه القيود معاً فى الجدول (٢-١) والذى يتضح منه ما يلى :



جدول (٢-١) صياغة مشكلة النقل

حسب أسلوب البرمجة الخطية لشركة الطوب الاسمنتى

١ - أن معاملات المتغيرات دائماً قيمتها الواحد الصحيح أو صفر فى كافة القيود . فعلى سبيل المثال معامل المتغير س $_{١٢}$ فى القيد الأول هو صفر ، ومعامل المتغير س $_{٢١}$ فى القيد الرابع هو صفر أيضاً .

٢ - أن شكل العلاقات بين المتغيرات فى القيود يأخذ نمطاً ثابتاً .فبالنسبة لمجموعة قيود الطاقة تكون العلاقات أفقية للمتغيرات المتجاورة . اما فى مجموعة قيود الطلب فالعلاقة بين المتغيرات المتتابعة يمكن ملاحظتها فقط من تتابع القيود الخاصة بالطلب .

٣ - نظراً لوجود اشارة = فى كل القيود فإن تحويلها إلى الصيغة النمطية ، حتى يمكن إستخدام أسلوب السمبلكس فى حلها ،

يستلزم إضافة متغير آخر قيد وهو متغير وهمي artificial . ويعنى ذلك أن عدد المتغيرات الوهمية يساوى عدد القيود . وذلك أمر يزيد من حجم المشكلة . كذلك ففى حالة عدم التوازن يجب إضافة متغيرات جديدة تعبر عن كميات من مصادر وهمية dummy أو منقولة إلى مراكز توزيع وهمية (كما سوف نرى فيما بعد) .

٤ - لا يمكن وجود حل ممكن أساس basic feasible Solution إلا إذا كانت المشكلة متوازنة . بمعنى أن إجمالى الطاقة يساوى إجمالى الطلب . فعدم وجود مثل هذا التوازن سوف يؤدى إلى تناقض بين القيود الخاصة بالطلب والطاقة نظراً لأن كل منهما يتناول نفس المتغيرات س. ولذلك من الضرورى قبل محاولة حل مشلة النقل سواء بإستخدام أسلوب السمبلكس أو أسلوب النقل أن يتم عمل توازن للمشكلة . ويكون ذلك بإضافة مصادر أو مراكز توزيع وهمية حسب الحالة .

أما الصيغة العامة لمشكلة النقل فى شكل اسلوب البرمجة الخطية فتأخذ الشكل التالى :

دالة الهدف : قلل $ت = \sum_{أ=١}^{م} \sum_{ب=١}^{ك} ق_{أب} \, س_{أب}$

حيث ت = إجمالى تكلفة النقل

$ق_{أب}$ = تكلفة نقل الوحدة من الموقع أ الى المركز ب

$س_{أب}$ = عدد الوحدات التى يتم نقلها من الموقع أ الى المركز ب

م = عدد المواقع التى يتم فيها الانتاج (مصادر)

أ = رقم الموقع الذى يتم فيه الانتاج = ١ ، ٢ ، ... ، م

ك = عدد المراكز التى يتم اليها النقل

ب = رقم المركز الذى يتم اليه النقل = ١ ، ٢ ، ... ، ك

$ط_{أ}$ = مقدار الطاقة فى الموقع أ

$ك_{ب}$ = مقدار الطلب فى المركز ب

أما القيود فهى :

١ - قيود الطاقة فى مصادر الأنتاج :

$$\underset{ب=١}{\overset{ك}{مجـ}} س_{أب} = ط_{أ} \text{ (الطاقة فى المصدر أ)}$$

لكل قيم أ = ١ ، ٢ ، ... ، م

٢ - قيود الطلب فى مراكز التوزيع :

$$\underset{أ=١}{\overset{م}{مجـ}} س_{أب} = ك_{ب} \text{ (الطلب فى المركز ب)}$$

لكل قيم ب = ١ ، ٢ ، ... ، ك

٣ - وقيود عدم السالبة

س أ ب $\leq$ صفر

٤ - وهى قيود التوازن الواجب أضافتها فى حالة عدم التوازن فهى :

$$\underset{أ=١}{\overset{م}{مجـ}} ط_{أ} = \underset{أ=١}{\overset{م}{مجـ}} \left(\underset{ب=١}{\overset{ك\,١}{مجـ}} س_{أب} \right)$$

$$= \underset{ب = ١}{\overset{ك}{\text{مجـ}}} \left(\underset{أ = ١}{\overset{م}{\text{مجـ}}} س_{أب} \right) = \underset{ب = ١}{\overset{ك}{\text{مجـ}}} ل_{ب}$$

من هذه النقاط السابقة يتضح أن مشكلة النقل وإن كانت يمكن تصويرها فى شكل برمجة خطية إلا أن أسلوب السمبلكس فى حلها يستلزم جهداً كبيراً نظراً لضخامة المشكلة ـ فمشكلة صغيرة مثل التى أمامنا سوف يكون بها على الأقل خمسة عشر متغيراً . كذلك فإن السمات الخاصة بهذا النوع من المشاكل من حيث معاملات القيود بين المتغيرات جعلت من الممكن أستخدام أسلوب خاص بها يطلق عليه أسلوب النقل .

التطور التاريخى لأسلوب النقل

لم يبدأ التحليل الرياضى لمشكلة النقل قبل عام ١٩٤١ ، عندما نشر F. I. Hitchcock دراسته الأولى بعنوان :

" the distribution of a product-fromseveral sources to Numerous locations . "

والتى تعلقت على أساس بتوزيع السلع على مواقع متعددة . ومنذ ذلك التاريخ قام العديد من الباحثين مثل George B. Dantsig و T. C. Koopmans و W. W. cooper & A. Charnes وعديدين آخرين بدراسة نفس المشكلة . ففى عام ١٩٤٧ قدم Koopmans دراسة ليست مرتبطة بدراسة Hitchcock ، موضوعها توسيع أستخدام فرة أسلوب النقل وكان عنوانها :

" Optimum utiltzation of the transpotation System . "

كما قدم Dantisg كيفية صياغة مشكلة النقل بأستخدام أسلوب البرمجة الخطية فى الحالات المختلفة . وساهم كل من Cooper &

Charnes فى عام ١٩٥٣ بتقديم طريقة تقييم الخلايا الفارغة والتى تعرف بأسلوب السير على الحجر Stepping Stone method. كما تم تقديم طريقة أخرى للوصول إلى الحل الأمثل إعتماداً على فكرة الثنائية duality وذلك فى عام ١٩٥٥ ، وتعرف هذه بطريقة التوزيع المعدل MODI .

مزايا واستخدامات أسلوب النقل

يعد أسلوب النقل من أكثر أساليب بحوث العمليات أستخداماً فى الحياة العملية ، وبصفة خاصة لأغراض التخطيط . ويرجع ذلك أساساً ، كما ذكرنا مسبقاً إلى سهولة العمليات الحسابية اللازمة لاستخدام هذا الاسلوب . وتعد هذه السهولة على درجة كبيرة من الأهمية بالنسبة للتطبيقات الضخمة والتى قد يؤدي كبر حجمها إلى صعوبة ، بل أستحالة ، استخدام بعض الاساليب الأخرى مثل أسلوب السمبلكس .

أما السبب الثانى لشيوع هذا الاسلوب فهو وجود الكثير من المشاكل المواقف فى الحياة العملية والتى يعد أستخدام هذا الأسلوب بالنسبة لها أمراً واجباً . ففى قطاع الصناعة ، دائماً ما تواجه الشركات بمشكلة نقل المواد والمستلزمات اللازمة من مواقـع مختلفة (مراكز انتاج ، أو مراكز تخزين ، أو موانى) الى جهات الاستخدام والتى عادة ما تكون مواقع مختلفة ومتفرقة فى أنحاء عديدة . كذلك من الطبيعى أن تفكر تلك المشروعات بعد ذلك فى عملية توزيع المنتجات النهائية على مراكز التزيع المختلفة والتى نادراً ما تتركز فى موقع واحد ـ فكثير من المشروعات تلجاء الى عمل مخازن رئيسية لها

warehouses يتم فيها تخزين المنتجات التى تغطى أحتياجات تجار الجملة والتجزئة فى منطقة جغرافية معينة . وذلك بالطبع يؤدى إلى البحث أيضاً عن أفضل شبكة نقل وتوزيع distribution من هذه المخازن الى مواقع الاستخدام الفعلى سواء كان ذلك للمستهلك النهائى أو لتجار الجملة أو التجزئة أو حتى إلى معارض الشركة الخاصة بها . ومع ظهور ما يعرف بالشركات الدولية والتى لها العديد من المصانع على المستوى العالمى وتتولى توزيع منتجاتها دولياً يكون السؤال أمامها ما هى أفضل شبكة توزيع تضمن تقليل تكلفة النقل والشحن الإجمالية إلى أقل حد ممكن .

وبالاضافة الى الشركات الصناعية ، فإن أسلوب النقل شائع التطبيق لحل مشكلة التوزيع فى مجالات أخرى عديدة . فهو يستخدم فى حل مشكلة نقل الامدادات والمعدات العسكرية military logistics problem من مواقع مختلفة إلى أماكن العمليات عند الحاجة إليها - فعادة ما تكون هناك مواقع ثابته ومخازن للذخيرة منتشرة فى أنحاء الدولة (أو حتى مستوى العالم) ، ويمكن بأستخدام أسلوب النقل تحديد كميات الامدادات الواجب نقلها من كل موقع إلى مكان العمليات بشكل يضمن تقليل تكاليف النقل الإجمالية الى أقل حد ممكن . وهذه التكاليف من الممكن أن تكون فى صورة أموال أو فى صورة الوقت اللازم لعملية الانتقال . حيث أن عنصر الوقت يكون هام جداً فى العمليات العسكرية .

كذلك من الشائع استخدام هذا الاسلوب فى قطاع المقاولات حينما يكون لشركات المقاولات الكبيرة مخازن متعددة فى اماكن

مختلفة ويكون مطلوب منها تحديد شبكة التوزيع اللازمة لنقل المعدات ومواد البناء من تلك المخازن (او الموانى) إلى مواقع العمل ..

يتبقى الآن السبب الثالث الذى ساعد على ذيوع استخدام هذا الاسلوب ، وهو المرونة Flexibility التى يمتاز بها هذا الاسلوب . يقصد بذلك قدرة هذا الاسلوب على معالجة مشاكل أخرى ليست أصلاً مشاكل توزيع ولكن يمكن صياغتها حسب مشكلة النقل وعلى الرغم من أننا سوف نتناول بعض هذه التطبيقات فى مواضعها إلا أننا نكتفى هنا بذكر أمثلة لبعض هذه الأستخدامات غير التقليدية:

١ ـ استخدام أسلوب النقل فى حل مشكلة تخطيط الانتاج الاجمالى والمخزون .

٢ ـ إستخدام أسلوب النقل فى تحديد موقع المصنع .

٣ ـ إستخدام أسلوب النقل فى جدولة تشغيل الطائرات .

٤ ـ إستخدام أسلوب النقل فى حل مشكلة متعهد توزيع الأغذية .

الفروض والخصائص الأساسية

قبل أن نتعرض لخطوات حل المشكلة باستخدام أسلوب النقل ، يمكننا الآن ان نوجز أهم الفروض الواجب التاكد منها قبل أستخدام هذا الاسلوب . فكثيراً من أساليب بحوث العمليات قد يساء أستخدامها بسبب تطبيقها فى حالات لا تتوافر فيها الشروط الأساسية لمثل هذا النوع من المشاكل . كما يتضمن ذلك الجزء

ضمنياً تحديداً للخصائص التى تتسم بها مشكلة النقل والتى يمكن معها أستخدام هذا الاسلوب .

١ - أن تكون العلاقات خطية .. فطالما أن مشكلة النقل هى من المشاكل التى يمكن حلها بأستخدام أسلوب البرمجة الخطية فيعنى ذلك أن يتوافر شرط العلاقات الخطية فى دالة اهدف وكل أنواع القيود . ففى دالة الهدف مثلاً ، وهى دالة تكاليف النقل ، يفترض أنه إذا كانت تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر الأول إلى المركزالاول هى ١ جنيه فإن نقل وحدتين سوف يتكلف ٢ جنيه ، كما أن نقل عشرة وحدات سوف يتكلف عشرة جنيهات ... وهكذا . ويعنى ذلك انه ليس هناك ما يسمى بوفورات فى تكلفة الشحن للوحدة نتيجة لزيادة الكميات التى يتم نقلها . وعلى الرغم من أنه يصعب تبرير هذا الغرض إذا كانت وحدة القياس صغيرة ، إلا أنه يمكن تبريره فى حالات كثيرة عندما تكون وحدة النقل كبيرة . ومثال ذلك أن تكون الوحدة هى « حمولة سيارة » أو «مساحة معينة على المركب » أو « بالألف طن» أو « بالألف طوبة» وهذه أمور شائعة فى الحياة العملية .

كذلك ايضاً فإن قيود الطاقة وقيود الطلب يجب أن تكون خطية . وذلك أمر واضح ومستوفى بشكل دائم فى مشكلة النقل نظراً لأن تعريف المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها (الكميات المنقولة) لا يسمح بوجود علاقات غير خطية بينها (مثل الضرب) أو تربيع الكميات المنقولة مثلاً .

٢ - أن تكون قيم المتغيرات قيماً صحيحة integer وليست بها

كسور. فاستخدام أسلوب البرمجة الخطية بصفة عامة قد يؤدى إلى وجود أعداداً بها كسور real numbers فى الحل النهائى أما أسلوب النقل بوجه خاص فيضمن أن تكون قيم المتغيرات (الكميات التى يتم نقلها) فى كافة مراحل الحل وفى الحل النهائى قيماً صحيحة ، وهذه الخاصية الأخيرة قريبة الشبه بأسلوب البرمجة العددية integer programming

٣ - أن تتوافر البيانات اللازمة لنموذج النقل. وهى كما أوضحنا من قبل : مقدار الطاقة المتاحة فى كل مصدر ، مقدار الطلب اللازم لكل مركز توزيع ، وتكلفة نقل الوحدة من مصدر معين إلى مركز توزيع معين . وهذه البيانات قد تتغير من فترة لأخرى ولذلك يجب أعادة النظر بشكل دائم فى شبكة التوزيع المثلى بناء على التغير الذى يطرأ هلى هذه البيانات .

٤ - أن تكون هذه البيانات مؤكدة وليست أحتمالية . فطبيعة اسلوب النقل تقوم على أنه تحليلاً تقريرياً deterministic يكون فيه تقدير مقدار الطاقات والطلب والتكلفة على أساس قيمة واحدة وليست تقديرات احتمالية فى شكل توزيع أحتمالى - فهناك حالات أخرى يخضع فيها تقدير الطلب مثلاً فى أحد مراكز التوزيع لتوزيعاً أحصائياً معيناً - كأن يكون له توزيعاً معتاداً له متوسط محدود وانحراف معيارى مقدر . كذلك فإن طاقة المصادر قد تكون ذات تقدير أحتمالى أيضاً ولا يصلح أسلوب النقل التقليدى الأساسى فى معالجة مثل هذه الحالات .

٥ ـ أن تكون الوحدات التي يتم نقلها متجانسة hom.ogeneous ويقصد بذلك أن الوحدات الموجودة فى كافة المصادر هى وحدات متشابهة من حيث المواصفات ودرجة الجودة وبالتالى لا يؤثر ذلك على تكلفة الشحن من وحدةإلى أخرى . كذلك فإن الوحدات المطلوبة فى مراكز التوزيع تكون متشابهة أيضاً ـ ويتضح من ذلك الفرض أيضاً أن مشكلة النقل يتم حلها لكل منتج على حده . فدائماً النموذج يناقش شبكة التوزيع المثلى لنفس المنتج .

٦ ـ لا يسمح فى ظل هذا الاسلوب بأن يكون هناك ما يسمى بالتحويل بين المصادر أو التحويل بين المراكز ، أو أن يكون أحد المصادر أو المراكز نقطة تمر بها كميات قادمة من مصدر أو مركز معين لنقلها إلى مصدر أو مركز آخر ، وهذه هى حالة transshipment التى تحتاج إلى معالجة خاصة (راجع [ ] Wagner أو [ ] (Loomba and Turban

٧ ـ لا يمكن أستخدام أسلوب النقل إلا فى حالة التوازن (إجمالى الطلب = إجمالى الطاقة) . ولذلك فى حالة عدم التوازن يتم عمل توازن عن طريق إضافة مصادر أو مراكز توزيع وهمية .

٨ ـ من الممكن استخدام أسلوب النقل فى حالة تعظيم الربح . وفى هذه الحالة يجب توافر بيانات عن تكاليف الانتاج ، وتكاليف النقل ، وأسعار البيع فى المصادر ومراكز التوزيع المختلفة. ففى أحيان كثيرة تختلف تكلفة الانتاج من مصنع إلى آخر نظراً لأختلاف أسعار المادة الخام ،مستويات الأجور الضرائب من منطقة إلى آخرى . كذلك فإن أسعار البيع تختلف من مكان الى آخر حسب

درجة المنافسة السائدة ودرجة الحاجة الى السلع . وذلك أمر هام بالنسبة لمنافذ التوزيع العالمية .

خطوات الحل باستخدام أسلوب النقل

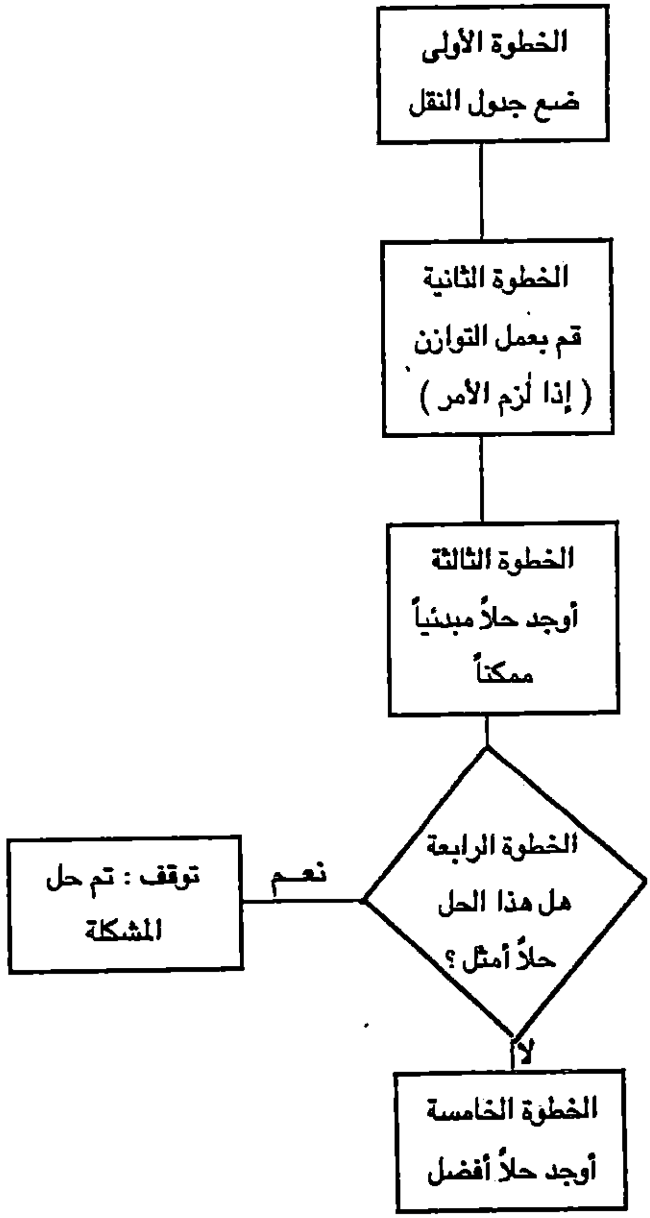
إن أسلوب النقل هو أسلوب حل فى شكل خطوات محددة تعتمد على البحث عن الحلول وتقييمها بقصد الوصول إلى الحل الأمثل ، وهو فى ذلك يتشابه كثيراً مع أسلوب السمبلكس فى مشاكل البرمجة الخطية بصفة عامة . وتتكون هذه العملية من خمسة خطوات أساسية كما هو موضح فى الشكل (م ٢.- ٢) ويمكن ايجازها فيما يلى :

الخطوة الأولى : ضع مشكلة النقل فى شكل جدول النقل التقليدى والذى يحتوى على بيانات الطاقة والطلب وتكلفة نقل الوحدة

الخطوة الثانية : قم بعمل التوازن (إذا لزم الأمر) ، وذلك لضمان تعادل إجمالى الطاقة مع إجمالى الطلب . ويكون ذلك عن طريق إضافة صفا أو عمودا وهميا (كما سنرى) .

أما إذا كانت المشكلة متوازنة فلا داعى للقيام بهذه الخطوة .

الخطوة الثالثة: أوجد الحل لمبدئى الممكن .. وهو عبارة عن الحل الذى يأخذ فى الحسبان كل من قيود الطاقة وقيود الطلب ويفى بشرط عدد المتغيرات الأساسية = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١
ويمكن الوصول إلى الحل المبدئى عن طريق أى من الطرق التالية :



شكل (م ٢ ـ ٢) خطوات حل مشكلة النقل

١ ــ طريقة التفضيل المشترك Mutually Preferred Method

٢ ــ طريقة الركن الشمالى الشرقى (والتى يطلق عليها طريق الركن الشمالى الغربى Northwest Corner Rule فى الانجليزية) .

٣ ــ طريقة أقل التكاليف The Least Cost Method (أو طريقة أعلى الأرباح Largest Profit فى حالة تعظيم الأرباح) .

٤ ــ طريقة فوجال التقريبية Vogal's Approximation Method

الخطوة الرابعة : اختبار مثالية الحل . وفيها يتم اختبار ما إذا كان الحل هو حلا أمثل أم لا . ويمكن أن يتم ذلك باستخدام أى من الطرق التالية :

١ ــ طريقة الحجر المتنقل Stepping Stone Method

٢ ــ طريقة التوزيع المعدل

Modified Distribution (MODI) Method

الخطوة الخامسة : تحسين الحل الحالى ... ويكون ذلك فى حالة التأكد من أن الحل الحالى ليس هو الحل الأمثل فى الخطوة السابقة . ويتم فى هذه الخطوة تغيير المتغيرات الأساسية (الخلايا المملوءة) الموجودة فى الحل عن طريق ادخال متغيرات غير أساسية (الخلايا الفارغة) . ويتضمن ذلك أيضا تحديد أقصى قيمة يمكن أن يأخذها المتغير الأساسى الجديد .

الخطوة السادسة : كرر الخطوات الرابعة والخامسة حتى تصل إلى الحل الأمثل .

ونعتقد عند هذه المرحلة أن أفضل طريقة لشرح هذه الخطوات تفصيلا هى عن طريق مثال عملى .

مثال (٢ ـ ١) شركة الطوب الأسمنتى (تابع)

باستخدام نفس البيانات التى تم ذكرها من قبل عن شركة الطوب الأسمنتى ، الخاصة بطاقات المصانع واحتياجات مراكز التوزيع وتكلفة نقل الوحدة ، يمكن اتباع خطوات الحل على النحو التالى :

الخطوة الأولى : وضع المشكلة فى شكل جدول النقل .

ويتضح ذلك من الجدول (٢ ـ ١) الذى يحتوى على مجموعة من الصفوف يعبر كل منها عن أحد المصانع ومجموعة من الأعمدة يعبر كل منها عن أحد مراكز التوزيع . كما يوجد صفا إضافيا فى آخر الجدول يعبر عن مقدار الطلب اللازم لكل مركز توزيع وإجمالى الطلب . وأيضا يوجد عمودا إضافيا فى آخر الجدول يعبر عن مقدار الطاقة اللازمة لكل مصنع وكذلك إجمالى الطاقات المتاحة بها جميعا . أما بينات تكلفة نقل الوحدة فقد تم وضعها فى أعلى الركن الشمالى الشرقى من كل خلية فى الجدول (بالطبع يمكن وضعها على يسار الخلية أيضا فى الركن الشمالى الغربى) .

الخطوة الثانية : عمل التوازن إذا لزم الأمر :

بتأمل الأرقام الواردة فى كل من الصف والعمود الآخير فى مصفوفة النقل الأساسية نجد أن مجموع الطاقة المتاحة = ١٢٠ + ٨٠ + ٨٠ = ٢٨٠ وحدة هو تماما مجموع الطلب اللازم فى مراكز التوزيع = ١٥٠ + ٧٠ + ٦٠ + ٢٨٠ . وعلى ذلك فالمشكلة متوازنة ، لا يلزم إجراء أية تعديلات أخرى .

من / إلى	القاهرة	الاسكندرية	المنصورة	الطاقة
بركة السبع	٨	١٠	٩	١٢٠
دمنهور	١٢	٥	١٥	٨٠
أبو حماد	٧	١٤	٩	٨٠
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

الجدول (٢ ـ ١)

جدول النقل لشركة الطوب الأسمنتى

الخطوة الثالثة : إيجاد حلا مبدئيا :

أجملنا فيما سبق أن الحل المبدئى هو الذى يأخذ فى الحسبان كل من قيود الطاقة وقيود الطلب ويعنى بشرط عدد المتغيرات الأساسية = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١ . ولنكن الآن أكثر تحديدا : أن الحل المبدئى يجب أن يكون ممكنا Feasible كما أنه

يجب أن يكون أساسيا Basic ولذلك من الصحيح ، كما فعلنا فى أسلوب السمبلكس، أن يطلق عليه الحل الممكن الأساسى المبدئى Initial basic feasible وحتى يمكن تحقيق هاتين الخاصيتين فى مشكلة النقل يجب أولا ألا يتعارض هذا الحل مع أى من قيود الطاقة أو قيود الطلب . وذلك أمر ممكن أن نضمنه بمجرد أننا فى تحديد الكميات الواجب نقلها نراعى ألا تزيد على إجمالى الطاقة فى كل مصنع ، كما أن الكميات التى تنقل إلى كل مركز لا تزيد عن إجمالى المطلوب فى هذا المركز . ويمكن القول أن أى من الطرق الأربعة ـ التى سوف نتناول بعضها فيما بعد ـ تضمن تلقائيا تحقق هذا الشرط . أما الشرط الثانى ، وهو شرط أن يكون حلا أساسيا ، فيعنى أن المتغيرات المختارة كأساس للحل(المتغيرات الأساسية) يجب أن يكون بينها وبين عدد القيود (المعادلات) ذات التأثير Effective علاقة عددية معينة . فإذا تأملنا المعادلة الواحدة التى بها متغيرين مجهولين ، نجد أنه للوصول إلى حل لقيم هذين المتغيرن يجب أن نفترض أن واحدا من هذه المتغيرات يساوى الصفر . فلا يمكن استخدام معادلة واحدة فى الوصول إلى قيم مجهولين . كما لا يمكن استخدام معادلتين فى الوصول إلى قيم ثلاثة مجاهيل . ولكننا فى قواعد الجبر نعرف أن عدد المعادلات يجب أن يعادل عدد المجاهيل حتى يمكن حل هذه المعادلات معا لتحديد قيمة هذه المجاهيل . لذلك وباستخدام اصطلاحات البرمجة الخطية ، نقول أن عدد المجاهيل التى يمكن أن نحدد قيمتها يجب أن يساوى عدد القيود (المعادلات فى الصيغة

النمطية) المؤثرة . أما معنى مؤثرة ، فهو ألا يكون قيدا زائدا . Redundent

وبتطبيق هذا المفهوم السابق نجد أن الخلايا التى يتم ملئها تعبر عن المتغيرات الأساسية وأن الخلايا التى تظل فارغة تعبر عن المتغيرات غير الأساسية . وعلى ذلك فإن عدد الخلايا المملوءة يجب أن يساوى عدد القيود المؤثرة . وبتأمل القيود الموجودة فى مشكلة النقل نجد أنها عبارة عن قيود طاقة (عددها هو عدد الصفوف) وقيود طلب (عددها هو عدد الأعمدة) . وعلى ذلك فإن عدد القيود بصفة عامة فى مشكلة النقل = عدد الصفوف + عدد الأعمدة . والسؤال الآن : هل كل هذه القيود تعد قيودا مؤثرة ؟ الإجابة هى بالنفى . فإذا كان لدينا قيود طاقة عددها (م) وقيود طلب عددها (ك) فإن تحقق القيود التى عددها (م + ك – ١) يضمن تلقائيا تحقق القيد (المعادلة) الذى رقمه (م + ك) . ويرجع ذلك بشكل أساسى إلى خاصية التوازن التى تتحقق فى مشكلة النقل ، وذلك كما يلى :

مجـ قيود الطاقة (م قيود) = الطاقة الأجمالية

و مجـ قيود الطلب (ل قيود) = الطلب الإجمالى .

ونظرا لأن الطاقة الإجمالية = الطلب الإجمالى

فإن ذلك يعنى أن مجـ قيود الطاقة (م قيود) = مجـ قيود الطلب (ل قيود) .

ومنها يمكن أن نخلص إلى أن هاتين المعادلتين متماثلتين

Identical ويمكن الاستغناء عن أحدهم مع تحقق نفس الشـــرط . وبذلك يكون لدينا معادلة زائدة redandent وأن عدد القيود المؤثرة هو (م + ل − ١) .

وبناء على ذلك فإن عدد الخلايا المملوءة فى أى حل من حلول مسألة النقل الممكنة يجب أن يكون معـادلا لعدد (الصفوف + الأعمدة −١) .

ولنوضح هذه الفكرة أكثر عن طريق تأمل القيود الستة الموجودة فى مشكلة شركة الطوب الأسمنتى . بفرض أن القيد رقم (٦) قد تم تجاهله .. هل يؤثر ذلك على النتائج التى نتوصل إليها ؟ .. إذا تحققت القيود من (١) إلى (٥ فيعنى ذلك أن

س$_{٣١}$ = ١٢٠ − س$_{١١}$ − س$_{٢١}$ (٧)

، س$_{٣٢}$ = ٨٠ − س$_{١٢}$ − س$_{٢٢}$ (٨)

، س$_{٣٣}$ = ٨٠ − س$_{١٣}$ − س$_{٢٣}$ (٩)

، س$_{١١}$ = ١٥٠ − س$_{١٢}$ − س$_{١٣}$ (١٠)

. س$_{٢١}$ = ٧٠ − س$_{٢٢}$ − س$_{١٣}$ (١١)

وبجمع المعادلات (٧) ، (٨) ، (٩) نجد أن

س$_{٣١}$ + س$_{٣٢}$ + س$_{٣٣}$

= ٢٨٠ − س$_{١١}$ (− س$_{٢١}$ − س$_{٢٢}$ − س$_{١٣}$ − س$_{٢٣}$

وبالتعويض عن قيمة كل من $س_{١١}$ ، $س_{٢١}$ من المعادلتين (١٠) ، (١١) في المعادلة الآخيرة التى توصلنا إليها فيكون لدينا

$$س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٣} = ٢٨٠ - (١٥٠ - س_{١٢} - س_{١٣})$$

$$- (٧٠ - س_{٢٢} - س_{٢٣})$$

$$- س_{١٢} - س_{٢٢} - س_{١٣} - س_{٢٣}$$

$$= ١٢٠ + س_{١٢} + س_{١٣} - ٧٠ + س_{٢٢} + س_{٢٣}$$

$$- س_{١٢} - س_{٢٢} - س_{١٣} - س_{٢٣}$$

∴ $س_{٣١} + س_{٣٢} + س_{٣٣} = ٦٠$. وهــى بالضبط المعادلــة رقـم (٦) فى القيود.

نخلص من كل ذلك أن وجود شرط التوازن فى مشكلة النقل يجعل عــدد القيــود المؤثرة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١ . وبناء على ذلك فإن عدد المتغيرات الأساسية فى أى من الحلول الممكنه يجب أن يكون معادلاً لـ (عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١) وهذا بالظبط هو عدد الخلايا المملوءة فى أى حل من حلول مسألة النقل .

ولذلك يجب التأكد دائماً خلال مراحل الحل من تحقق هذا الشرط ، حتى لا يحدث ما يسمى رياضياً بحالة الأنتكاس degenera-cy والتى سوف نعالجها فيما بعد .

وسوف نعرض فى هذا الجزء لكيفية الوصول إلى الحـل

المبدئى . وعلى الرغم من أن طريقتى الركن الشملى الشرقى وفوجال التقريبية هما الأكثر شيوعاً ، إلا أننا سوف نعرض لكيفية استخدام الأساليب الأربعة الممكن استخدامها فى هذا الشأن .

(أ) استخــدام طريقة التفضيل المشترك Mutually preferred method فى تحديد الحل المبدئى :

تعتمد هذه الطريقة على تحديد الخلية التى تعد مفضلة مفضلة بالنسبة لكل الخلايا التى تقع فى نفس الصف الموجودة فيه وأيضاً مفضلة بالنسبة لكل الخلايا التى تقع فى نفس العمود الموجودة فيه . ويكون أساس التفضيل هو تكلفة نقل الوحدة . وبالنظر إلى تكلفة نقل الحدة فى كل الخلايا الموجودة فى الجدول (٢ ـ ٢) نجد أن الخلية (دمنهور / الاسكندرية) تعد مفضلة على كل الخلايا فى الصف الثانى . فتكلفة نقل الوحدة بها (٥) هى أقل من القيم الموجودة بالخلايا الأخرى فى الصف (١٢ ، ١٥) كذلك فإن ذات الخلية تعد مفضلة على كل الخلايا فى العمود الثانى . فقيمتها أقل من ١٠ ، ١٤ الموجودة فى الخلايا الأخرى فى ذات العمود . وينطبق نفس الشرط على الخلية (أبو حماد / القاهرة) فتكلفة النقل بها تجعلها مفضلة على كل الخلايا فى الصف الأخير وعلى كل الخلايا في العمود الأول. ويعنى ذلك أن كل من الخلايا (دمنهور / الأسكندرية) و (أبو حماد / القاهرة) هى خلايا ذات تفضيل مشترك من وجهة نظر كل من الصفوف والأعمدة .

وتكون الخطوة التالية الآن هى محاولة ملء هذه الخلايا بأقصى كمية ممكنة . وهى عبارة عن الكمية التى لا تخل بشرطى الطاقة

والطلب ثم نقوم بعد ذلك بتعديل القيم الموجودة فى كل من الصف الأخير والعمود الأخير واستبعاد الصفوف والأعمدة التى تم أستخدام طاقتها أو أشباع كل الطلب اللازم لها . وكذلك كما يلى فى الجـدول (٢ ـ ٢)

من / الى	القاهرة	الاسكندرية	المنصورة	الطاقة المتبقية
بركة السبع	٨	١٠	٩	١٢٠
دمنهور	١٢	٥ ٧٠	١٥	٨٠ – ٧٠ = ١٠
أبو حماد	٧ ٨٠	١٤	٩	٨٠ – ٨٠ = صفر
الطلب المتبقي	١٥٠ – ٨٠ = صفر	٧٠ – ٧٠ = صفر	٦٠	٢٨٠

جدول (٢ ـ ٢)

وبأستبعاد هذا الصف الثالث (أبو حماد) والعمود الثانى (الأسكندرية) يكون لدينا الجدول التالى (٢ ـ ٣)

من / الى	القاهرة	المنصورة	الطاقة
بركة السبع	٨ ٧٠	٩	١٢٠ – ٧٠ = ٥٠
دمنهور	١٢	١٥	١٠
الطلب	٧٠ – ٧٠ = صفر	٦٠	١٣٠

جدول (٢ ـ ٣)

بتكرار نفس الخطات السابقة نجد أن الخلية (بركة السبع / القاهرة) تعتبر مفضلة سواء بالنسبة للعمود الأول أو الصف الأول ولذلك نقوم بملاءها بأكبر قدر من الوحدات وهو ٧٠ وحدة عند هذه المرحلة بأستبعاد العمود الأول نجد أنه لا يوجد لدينا إلا عمود المنصورة والذى سوف تستخدم فى إستكمال توزيع كل الوحدات المتاحة ، وذل باضافة خمسون وحدة فى الصف الأول وعشرة وحدات فى الصف الثانى ، كما يلى :

من / الى	المنصورة	الطاقة المتبقية
بركة السبع	$\boxed{9}$ ٥٠	٥٠
دمنهور	$\boxed{15}$ ١٠	١٠
الطلب المتبقى	٦٠	٦٠

جدول (٢ ـ ٤)

وبأجمالى كل هذه الجداول معاً نجد أن الحل المبدئى الذى توصلنا إليه حسب طريقة التفضيل المشترك هو كما فى الجدول (   ) ويمكن حساب تكلفته الاجمالية عن طريق ضرب الكميات المنقولة فى تكلفة نقل الوحدة والجمع على النحو التالى :

من / الي	القاهرة	الاسكندرية	المنصورة	الطاقة
بركة السبع	(٨) ٧٠	(١٠)	(٩) ٥٠	١٢٠
دمنهور	(١٢)	(٥) ٧٠	(١٥) ١٠	٨٠
أبو حماد	(٧) ٨٠	(١٤)	(٩)	٨٠
الطلب				٢٨٠

جدول (٢ ـ ٥) الحل المبدئى لمشكلة شركة

الطوب الرملى باستخدام طريقة التفضيل المشترك

ت الحل المبدئى=٧٠ (٨) + ٥٠ (٩) = ٧٠ (٥) = ١٠ (١٥) +٨٠ (٧)

=٥٦٠ + ٤٥٠ + ٣٥٠ + ١٥٠ + ٥٦٠ = ٢٠٧٠ جنيه

ويلاحظ أن هذا الحل المبدئى هو حلاً أساسيا ويرجع ذلك إلى أن عدد الخلايا المملوءة = عدد المتغيرات الأساسية = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١) = (٣ + ٣ – ١) = ٥ خلايا (متغيرات) .

ويعنى ذلك أن س$_{١١}$ = ٧٠ ، س$_{٣١}$ = ٥٠ ، س$_{٢٢}$ = ٧٠ ، س$_{٣٢}$ = ١٠ ، س$_{١٣}$ = ٨٠ وجميعها متغيرات أساسية . أما س$_{٢١}$ = س$_{١٢}$ = س$_{١٣}$ = س$_{٣٣}$ = صفر وجميعها متغيرات غير أساسية .

(ب) استخدام طريقة الركن الشمالى الشرقىNortheast Corner Rule فى تحديد الحل المبدئى :

وهذه هى أبسط الطرق الأربعة فى تحديد حلا مبدئيا . ويمكن تلخيص خطواتها فما يلى :

١ ـ ابدأ فى الركن الشمالى الشرقى (أعلى خلية على يمين جدول النقل) وضع بها أكبر قيمة ممكن أن تعطى للمتغير س١١ دون أن يخل ذلك بشرط الطاقة والطلب . ويعنى ذلك أن القيمة سوف تكون أقل القيمتين الموجودتين فى آخر الصف (الطاقة) وفى آخر العمود (الطلب) .

٢ ـ سوف يترتب على الخطوة السابقة إما استخدام كل الطاقة الموجودة فى المصنع الموجود فى الصف الأول أو الوفاء بالطلب اللازم بمركز التوزيع الموجود فى العمود الأول أو كليهما معا . فإذا كانت القيمة الموضوعة فى خلية الركن الشمالى الشرقى قد أدت إلى استيعاب كل الطاقة فقط فإن ذلك يقضى باستبعاد هذا الصف تماما من أية عمليات أخرى وتعديل رقم الطلب فى العمود بمقدارالقيمة التى يتم الوفاء بها . أى يتم طرح القيمة الموضوعة فى الخلية من القيمة الموجودة فى أسفل العمود .

أماإذا كانت القيمة الموضوعة فى خلية الركن الشمالى قد أدت إلى الوفاء بكل الطلب فقط ، فإن ذلك يقضى باستبعاد هذا العمود تماما من أية عمليات أخرى وتعديل رقم الطاقة فى الصف بمقدار القيمة التى تم استخدامها. أى يتم طرح القيمة الموضوعة فى الخلية من القيمة الموجودة فى آخر الصف .

أما إذا كان الرقم الموضوع قد أدى إلى استيعاب كل الطاقة وكل الطلب اللازم للصف والعمود فإن ذلك يستلزم استبعاد كلا من الصف والعمود من أية عمليات حسابية أخرى .

٣ ـ كرر نفس الخطوات السابقة مع البدء بالخلية التى تقع فى الركن الشمالى الشرقى الممكنة إلى أن يتم استخدام كل الطاقات المتاحة وكذلك الوفاء بكل أرقام الطلب فى مراكز التوزيع .

وبتطبيق ذلك على مثال شركة الطوب الأسمنتى يكون لينا الحل المبدئى التالى فى الجدول (٢ ـ ٢) :

والذى يكون فيه عدد الخلايا المملوءة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١ = ٣ + ٣ – ١ = ٥ وبالتالى فهو حلا ممكنا وأساسيا

كما أن تكلفة الحل = ١٢٠ (٨) + ٣٠ (١٢) + ٥٠ (٥) + ٢٠ (١٤) + ٦٠ (٩)

= ٩٦٠ + ٣٦٠ + ٢٥٠ + ٢٨٠ + ٥٤٠ = ٢٣٩٠ جنيه .

ويعنى هذا الحل أن :

$س_{١١}$ = ١٢٠ ، $س_{١٢}$ = ٣٠ ، $س_{٢٢}$ = ٥٠ ، $س_{٢٣}$ = ٢٠ ،

$س_{٢٢}$ = ٦٠ وجميعها متغيرات أساسية .

أما الخلايا الفارغة فتعنى أن $س_{١١}$ = $س_{٢١}$ + $س_{٢٢}$ = $س_{١٢}$ = صفر وجميعها متغيرات أساسية وبالطبع فإن هذا الحل غالبا ما يكون بعيدا جدا عن الحل الأمثل ؛ فهذه الطريقة لا تأخذ تكاليف النقل فى الحسبان عند تحديد التوزيع .

من /إلى	القاهرة	الاسكندرية	المنصورة	الطاقة
بركة السبع	[٨] ١٢٠	[١٠]	[٩]	١٢٠
دمنهور	[١٢] ٣٠	[٥] ٥٠	[١٥]	٨٠
أبو حماد	[٧]	[١٤] ٢٠	[٩] ٦٠	٨٠
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

جدول (٢ ـ ٢)

الحل المبدئى لشركة الطوب الأسمنتى باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى

(جـ) طريقة أقل التكاليف The Least-Cost Method فى تحديد الحل المبدئى :

تحاول هذه الطريقة أن تأخذفى الحسبان الهدف من حل مشكلة النقل ، وهو تقليل التكاليف ، عند تحديد الحل المبدئى . ويكون ذلك عن طريق أن تراعى تكاليف نقل الوحدة عند تحديد أقصى عدد من الوحدات يجب وضعه فى أحد الخلايا ويمكن ايجاز خطوات هذه الطريقة فيمايلى :

١ ـ حدد الخلية التى بها أقل تكلفة نقل للوحدة من بين كل الخلايا الموجودة في جدول النقل . ثم ضع بهذه الخلية أقصى عدد من الوحدات دون الإخلال بكل من قيود الطاقة وقيود الطلب فى الصف والعمود ، وفى حالة تعادل التكاليف يتم اختيار أى من

الخلايا دون قيد ، وسوف يترتب على هذه الخطوة إما استيعاب كل الطاقة فى أحد الصفوف أو الوفاء بكل الاحتياجات فى أحد الأعمدة أو كليهما معا .

٢ ـ إذا كانت الخطوة السابقة قد أدت إلى استيعاب كل الصفوف ، استبعد هذا الصف من أية عملية أخرى وقم بتعديل رقم الطلب بخصم الكمية التى تم الوفاء بها من القيمة الموجودة فى أسفل العمود . أما إذا أدت الخطوة السابقة إلى الوفاء بكل الطلب فى أحد الأعمدة فيجب إستبعاد هذاالعمود من أية عمليات أخرى وأن نقوم بتعديل رقم الطاقة بخصم الكمية التى تم استخدامها من القيمة الموجودة فى آخر الصف . أما إذا أدت الخطوة السابقة إلى استيعاب كل الطاقة وكل الطلب فى صف وعمود فيجب استبعاد كليهما من أية عمليات أخرى .

٣ ـ كرر الخطوات السابقة ، باختبار الخلية المتاحة ذات التكلفة الأقل بعد عمل التعديل حسب الخطوة الثانية ، وذلك إلى أن ييتم استخدام كل الطاقات والوفاء بكل الاحتياجات المطلوبة .

وبتطبيق ذلك على مثال شركة الطوب الأسمنتى نصل إلى الحل المبدئى فى الجدول (٢ ـ ٣) والذى فيه عدد الخلايا المملوءة = عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١ = ٥ وبالتالى فهو حلا ممكنا وأساسيا كما أن تكلفة الحل هى ٢٠٧٠ جنيه .

من /إلى	القاهرة	الاسكندرية	المنصورة	الطاقة
بركة السبع	٨ ‏ ٧٠	١٠	٩ ‏ ٥٠	١٢٠
دمنهور	١٢	٥ ‏ ٧٠	١٥	٨٠
أبو حماد	٧ ‏ ٨٠	١٤	٩	٨٠
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

جدول (٢ ـ ٣)

الحل المبدئى لشركة الطوب الأسمنتى باستخدام طريقة أقل التكاليف

ويلاحظ على هذا الحل ما يلى :

١ ـ هذا الحل ليس بالضرورة هو الحل المبدئى الذى توصلنا إليه باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى . ولكنه مجرد حلا مبدئيا ممكنا وأساسيا .

٢ ـ تكلفة هذا الحل تعد أقل من تكلفة الحل المبدئى الذى توصلنا إليه باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقى. وعادة ما تكون هذه هى النتيجة فى معظم الحالات إلا أنها ليست بقاعدة عامة . فذلك أيضا يتوقف على توزيع تكلفة نقل الوحدات داخل الخلايا

٣ ـ أنه على الرغم من الميزة الأساسية لهذه الطريقة وهى أنها تأخذ التكلفة فى الحسبان إلا أنه يعاب عليها بصفة أساسية أنه عند تطبيقها قد يؤدى اختيار خلية ذات تكلفة منخفضة إلى صعوبة

اختيار خلية أخرى قد تكون أفضل من حيث التكلفة الكلية ، ويرجع ذلك إلى استبعاد كل الصف أو كل العمود بسبب قيود الطاقة . ولذلك جاءت طريقة فوجال التقريبية للتغلب على طريقة حساب تكلفة الفرصة البديلة Opprotunity Cost .

(د) استخدام طريقة فوجال التقريبية(VAM) Vogals' Approximation Methad في تحديد الحل المبدئي :

. تؤدى هذه الطريقة بشكل دائم إلى حل مبدئي أفضل من الحل الذى تقدمة طريقة الركن الشمالى الشرقى . وتؤدى أيضاً فى أحيان كثيرة إلى الوصول إلى حل أفضل من الحل المبدئى الذى يتم التوصل اليه باستخدام طريقة أقل التكاليف . فواقع الأمر أنه فى كثير من الأحيان يكون الحل المبدئى الذى نتوصل اليه باستخدام أسلوب VAM هل الحل الامثل مباشرة . كما ان هذه الطريقة تعد أكثر ملائمة عند أستخدام الكومبيوتر فى الحل . وتقوم هذه الطريقة على فكرة توزيع الوحدات على الخلايا بشكل يقلل من تكلفة التوزيع الخطأ للوحدات . وتكلفة التوزيع الخطأ regret cost هى عبارة عن التكلفة الزائدة المترتبة على وضع وحدة خطأ فى خلية يجب ألا تكون فيها . وسوف يتضح هذا المعنى عند تطبيق الخطوات التالية والواجب أتباعها لاستخدام هذه الطريقة :

١ - أحسب تكلفة الخطأ penalty cost لكل صف وعمود . أما بالنسبة للصف فهى عبارة عن الفرق بين أقل تكلفة نقل للوحدات فى الصف والتكلفة الأعلى التى تليها فى ذات الصف - كذلك فإن تكلفة

الخطأ للعمود فهى عبارة عن الفرق بين أقل تكلفة نقل للوحدة فى العمود والتكلفة الاعلى التى تليها فى ذات العمود .

وبتطبيق هذه الخطوة عى مثال شركة الطوب الاسمنتى يكون لدينا الجدول (٢ ـ ٨)

من / الي	القاهرة	الاسكندرية	المنصورة	الطاقة	ص
بركة السبع	٨	١٠	٩	١٢٠	١
دمنهور	١٢	٥ ٧٠	١٥	٨٠	٧
أبو حماد	٧	١٤	٩	٨٠	٢
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠	
ع	١	٥	صفر		

ص تكلفة الخطأ فى الصف ، ع = تكلفة الخطأ فى العمود

جدول (٢ ـ ٨)

٢ ـ قارن كل الأرقام الواردة فى العمود ص والصف ع وأختار الصف والعمود ذو تكلفة الخطأ الأعلى من بين كل تلك القيم المحسوبة . (وفى حالة تساوى قيمتين اختار على أساس تحكمى) وفى مثالنا الحالى نجد أن أعلى قيمة من بين تلك الأرقام هى القيمة ٧ والموجودة فى صف دمنهور .

٣ ـ ضع فى الخلية التى بها أقل التكاليف فى الصف (أو العمود) المختار أقصى عدد ممكن من الوحدات مع عدم الإخلال بقيود الطاقة والطلب . وسوف يترتب على هذه الخطوة تجنب أكبر

قدر ممكن من تكلفة الخطأ فى التوزيع . وفى المثال الحالى يتم أختيار الخانة (دمنهور / اسكندرية) ليوضع بها أقصى رقم وهو ٧٠ وحدة . ثم نقوم بعمل التعديل فى قيم الصفوف أو الأعمدة واستبعاد الصف أو العمود ويكون لدينا الوضع التالى فى الجدول (٢ ـ ٩)

من / الي	القاهرة	المنصورة	الطاقة	ص
بركة السبع	٨	٩	١٢٠	١
دمنهور	(١٢) ١٠	١٥	١٠	٣
أبو حماد	٧	٩	٨٠	٢
الطلب	١٥٠	٦٠	٢١٠	
ع	١	صفر		

جدول (٢ ـ ٩)

٤ ـ كرر نفس الخطوات السابقة ، إلا أن يتم توزيع كل الوحدات . بتأمل الجدول السابق (٢ ـ ٩) نجد أن أكبر قيمة بين قيم كل من ص ، ع والمحسوبة هى القيمة ٣ الموجودة فى صف دمنهور ولذلك ننقوم بملأ الخانة ذات التكلفة الأقل فى صف دمنهور وهى الخانة (دمنهور / القاهرة) ـ بأقصى كمية ممكنة وهى ١٠ وحدات فقط ونقوم بأستبعاد صف دممنهور وعمل التعديلات والحسابات اللازمة كما فى الجدول التالى (٢ ـ ١٠)

من / الي	القاهرة	المنصورة	الطاقة	ص
بركة السبع	٨	٩	١٢٠	١
أبو حماد	٧ ٨٠	٩	٨٠	٢
الطلب	١٤٠	٦٠	٢٠٠	
ع	١	صفر		

جدول (٢ ـ ١٠)

وبتأمل القيم فى كل من ص ، ع نجد أن اكبر قيمة هى (٢) الموجودة فى الصف أبو حماد وعلى ذلك يتم ملء الخلية (أبو حماد / القاهرة) بأقصى قيمة ممكنه وهى ٨٠ وحدة . وتكرار نفس الخطوات السابقة ، لنصل حتماً إلى التوزيع التالى جدول (٢ ـ ١١) حتى دون حساب للقيم ص ، ع .

من / الي	القاهرة	المنصورة	الطاقة	ص
بركة السبع	٨ ٦٠	٩ ٦٠	١٢٠	
الطلب	٦٠	٦٠	١٢٠	
ع				

جدول (٢ ـ ١١)

ويمكن الآن اجمال المبدىء الحل الذى توصلنا اليه باتباع طريقة VAM فى الجدول (٢ ـ ١٢) والذى

من / الي	القاهرة	الاسكندرية	المنصورة	الطاقة
بركة السبع	(٨) ٦٠	(١٠)	(٩) ٦٠	١٢٠
دمنهور	(١٢) ١٠	(٥) ٧٠	(١٥)	٨٠
أبو حماد	(٧) ٨٠	(١٤)	(٩)	٨٠
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

(٢ ـ ١٢) الحل المبدئى باستخدام طريقة

فوجال التقريبية

يتضح منه أن عدد الخلايا المملوءة = ٥ وعلى ذلك فإن الحل يعتبر حلاً أساسيا ويعنى الحل أن $س_{١١}$ = ٦٠ ، $س_{٣١}$ = ٦٠ ، $س_{١٢}$ = ١٠ ، $س_{٢٢}$ = ٧٠ ، $س_{١١}$ = ٨٠ وهذه هى المتغيرات الاساسية . أما المتغيرات $س_{٢١}$ ، $س_{٣٢}$ ، $س_{٢٣}$ ، $س_{٣٣}$ فهى جميعاً متغيرات غير أساسية وقيمها تساوى الصفر . كذلك فإن تكلفة الحل

= ٦٠ (٨) + ٦٠ (٩) + ١٠ (١٢) + ٧٠ (٥) + ٨٠ (٧)

= ٤٨٠ + ٥٤٠ + ١٢٠ + ٣٥٠ + ٥٦٠ = ٢٠٥٠ جنيه .

وبمقارنة التكاليف التى توصلنا إليها فى الأساليب الأربعة التى أستخدمت لتحديد الحل المبدئى لشركة الطوب الأسمنتى كما فى الجدول (٢ ـ ١٣) نجد أن أسلوب VAM هو أفضلها . وذلك هو الوضع الشائع كما أوضحنا من قبل .

تكلفة الحل المبدئي	الاسلوب المستخدم
٢٠٧٠	طريقة التفضيل المشترك
٢٣٩٠	طريقة الركن الشمالي الشرقى
٢٠٧٠	طريقة أقل التكاليف
٢٠٥٠	طريقة VAM

جدول (٢ ـ ١٣)

وبانتهاء هذه الخطوة الثالثة نكون قد توصلنا إلى حل مبدئيا ممكناً وأساسياً ويجب هنا أن نلاحظ عدة ملاحظات :

١ ـ إن هذه الطرق الاربعة السابقة هى مجرد بدائل فيمكن استخدام واحدة منها فقط للوصول إلى الحل المبدئى . وكلها ممكن أستخدامها . ولا يلزم على الاطلاق أستخدام أكثر من طريقة :

٢ ـ ليست هناك طريقة واحدة أفضل من الطرق الأخرى بشكل دائم وفى كل الحالات ، ولكن الأمر يتوقف على شكل توزيع تكاليف نقل الوحدة فى جدول النقل الأصلى .

٣ ـ هناك بعض الطرق تؤدى إلى نتائج أفضل من طرف آخر فى غالبية الحالات . ومثال ذلك فإن طريقة أقل التكاليف تؤدى إى حل مبدئى ذو تكلفة أقل من الحل اذى يتم التوصل اليه باستخدام طريقة الركن الشمالى الغربى . كما أن طريقة فوجال التقريبية تفوق كل الطرق فى أحيان كثيرة .

٤ ـ إن معنى أن يعطى الحل المبدئى تكلفة أقل من حلاً مبدئياً آخر هو أن هذا الحل (ذو التكلفة الاقل) سوف يستلزم خطوات أقل حتى نصل إلى الحل الامثل . فطريقة VAM تستلزم عدد أقل من الخطوات (بعد الحل المبدئى) قبل الوصول إلى الحل الأمثل .

٥ ـ إن الحل المبدئى ليس هو نهاية المطاف فى مشكلة النقل ، فيجب القيام بخطوات أخرى للوصول إلى الحل الأمثل .

٦ ـ إن الطرق التى تتسم بالبساطة فى الوصول الى الحل المبدئى ، مثل طريقة الركن الشمالى الشرقى ، عادة ما تستلزم خطوات كثيرة حتى نصل إلى الحل الامثل . والعكس ، فالطرق التى تحتاج إلى جهد حسابى فى الوصول إلى الحل المبدئى ، مثل طريقة VAM ، فإنها غالبا ما تحتاج إلى خطوات محدودة مثل الوصول إلى الحل الأمثل . وعلى ذلك فإن الأمر يعتبر نوع من المواءمة بين الجهد المبذول فى مرحلة الحل المبدئى والجهد المبذول فى مرحلة الحل الأمثل.

الخطوة الرابعة : اختبار مثالية الحل :

والغرض الأساسى لعملية اختبار مثالية الحل هو اختبار ما إذا كان الحل الذى بين أيدينا (الحل المبدئى أو أى حل آخر) يمكن أن يتحسن أو أنه يعتبر أفضل الحلول . وتتشابه الخطوات اللازمة لعمل الاختبارمع عملية اختبار مثالية الحل فى ظل أسلوب السمبلكس . فنقوم أولا بالتمييز بين المتغيرات الأساسية Basic والمتغيرات غير الأساسية Nonbasic . أما الأولى فهى كل المتغيرات الموجودة فى

خلايا مملوءة . والثانية فهى كل المتغيرات الموجودة فى الخلايا الفارغة. ولكل خلية فارغة (متغير غير أساسى) نقوم بحساب أثر تحويل هذه الخلية إلى خلية مملوءة (متغير أساسى) . وإذا كان التغير لأى من هذه الخلايا سوف يؤدى إلى تقليل تكاليف النقل (أو زيادة الأرباح فى حال تعظيم الربح) فإن ذلك يعنى أن الحل ليس أمثل ويجب البحث عن حل أفضل . أما إذا كان التغير سوف يؤدى إلى زيادة تكاليف النقل (أو تخفيض الأرباح فى حالة تعظيم الربح) فإن ذلك يعنى أن الحل الذى بين أيدينا هو الحل الأمثل .

وهناك طريقتين يمكن استخدام أى منهما فى القيام بعملية الاختبارهذه ، وهما : طريقة السير على الحجر وطريقة التوزيع المعدل، وسوف نتناول هنا الطريقة الأولى فقط .

طريقة السير على الحجر Stepping Stone Method (*)

وتهدف هذه الطريقة إلى تحقيق خطوتين ، هما :

(أ) اختبار مثالية الحل .

(ب) تحسين الحل الحالى إذا لم يكن هو الحل الأمثل .

(*) على الرغم من أن معظم الكتب العربية قد درجت علي تسمية هذه الطريقة بطريقة الحجر المتنقل إلا أننا نرى أن هذه التسمية لا تعبر عن محتوى الطريقة . فالطريقة تقوم على أن الانتقال من خلية مملوءة إلي خلية مملوءة في أركان المسار يتشابه إلي حد كبير مع اسير في مكان فيه ماء ولا يتم السير إلا من حجر إلى حجر حتي تتجنب الوقوع فى الماء A Stone on which to step in walking .

أما اختبار مثالية الحل فيتم عن طريق القيام بما يلى لكل خلية فارغة .

١ ـ حدد مسارا مغلقا لكل خلية فارغة . ويكون ذلك عن طريق البدء فى الخلية الفارغة والتحرك فى اتجاه عقارب الساعة (أوعكس اتجاه عقارب الساعة) إلى خلية مملوءة فى نفس الصف أو العمود. ثم بعد ذلك ، تحرك رأسيا أو أفقيا (لا يجوز التحرك بزاوية) إلي خلية مملوءة أخري ، متخطيا بذلك خلايا مملوءة أو غير مملوءة إذا اقتضي الأمر ذلك دون تغييرهم .

اتبع نفس الإجراء إلي خلية مملوءة أخري إلي أن تصل مرة أخري إلي الخلية الفارغة الأصلية التي بدأت بها ، وبذلك ، يكون المسار مغلقا Closed loop . ودائما لكل خلية فارغة مسار وحيد لعملية التقييم.

٢ ـ في كل نقطة ركنية علي المسار ، والتي تقع في خلية ، ضع + أو – في شكل تتابعي . بمعني أن أول المسار في الخلية الفارغة التي يتم تقييمها يوضع به + ، ثم توضع – في الخلية الركنية التالية ، ثم + في الخلية الركنية التالية ، .. ، .. ، وهكذا . وبذلك فإن عدد إشارات الزائد سوف يعادل عدد إشارات الناقص بالنسبة لكل مسار . وعلي ذلك فإن عدد الخلايا التي تمر بها الأركان الخاصة بالمسار (نقط تغيير الاتجاه) سوف يكون دائما رقما زوجيا . وأقل عدد ممكن للنقط التي يتم فيها تغيير الاتجاه علي المسار هو أربعة فقط . كذلك يجب أن يلاحظ أنه يمكن أن يتقاطع المسار مع نفسه بقصد جعله

مسارا مقلقا . كما وأن هناك قيدا هاما جدا يجب مراعاته وهو أن يكون هناك خلية واحدة في الصف أو العمود علي المسار بها إشارة (+) وخلية واحدة في الصف أو العمود علي المسار بها إشارة سالبة (−) واحدة .

وهذا القيد الأخير يعد أساسيا حتي لايتم إغفال أى من قيود الطلب والطاقة الموجودة في كل صف وعمود .

ولتطبيق هذه الخطوة علي المثال الخاص بشركة الطوب الأسمنتي يجب أن نختار حلا مبدئيا وليكن هو الحل الذي توصلنا إليه باستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي ، والذي نعيد ذكره في الجدول (٢ ـ ٤) والذي يتضح منه أن الخلايا الفارغة (المتغيـرات الغير أساسيـة) الواجب

من / إلي	القاهرة	الأسكندرية	المنصورة	الطاقة
بركة السبع	٨ ١٢٠	١٠	٩	١٢٠
دمنهور	١٢ ٣٠	٥ ٥٠	١٥	٨٠
أبو حماد	٧	١٤ ٢٠	٩ ٦٠	٨٠
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

جدول (م ٢ ـ ٤)

تقييمها هي بركة السبع /الأسكندرية (خ ٢١) ، بركة السبع / المنصورة

(خ٢١) ، دمنهور / المنصورة (خ٢٢) ، أبو حماد/القاهرة (خ١٣) .

وسوف نحـدد مسـارا مغلقـا لكل خلية مع مراعـاة الشروط السابقة كما يلي :

بركة السبع / الأسكندرية (خ٢١) :

المسار هو خ٢١ ← خ١١ ← خ١٢ ← خ٢٢

(+) ← (–) ← (+) ← (–)

بركة السبع / المنصورة (خ٣١) :

المسار هو خ٣١ ← خ١١ ← خ١٢ ← خ٢٢ ← خ٢٣ ← خ٣٣

(+) ← (–) ← (+) ← (–) ← (+) ← (–)

ويلاحظ علي هذا المسار أننا قد تخطينا الخلية الفارغة خ٢١ وهذا أمر جائز ، أما كل النقط الركنية فهي تقع في خلايا مملوءة وهذا أمر واجب . كذلك فإن اتجاه المسار هنا فهو اتجاه عقرب الساعة . وبتأمل عدد الخلايا التي بها (+) أي التي بها إضافة نجد أنه مساويا لعدد الخلايا التي بها (–) ولذلك فإن المسار يعد مسارا مغلقا . وعدد هذه الخلايا هو عدد زوجي = ٦ .

دمنهور / المنصورة (خ ٣٢) :

المسار هو خ٣٢ ←— خ٢٢ ←— خ٢٣ ←— خ٣٣

(+) ←— (−) ←— (+) ←— (−)

أبو حماد / القاهرة (خ ١٣) :

المسار هو خ١٣ ←— خ٢٣ ←— خ٢٢ ←— خ١٢

(+) ←— (−) ←— (+) ←— (−)

والآن لدينا مسارات مغلقة لكل الخلايا الفارغة ولذلك ننتقل الى الخطوة التالية .

٣ ـ حساب قيمة تعبر عن أثر ملء الخلية التى تم تقييمها بوحدة واحدة . وتعرف هذه القيمة بمقياس التقييم للخلية Cell evaluator . ويمثل الأثر الاجمالى المترتب على إضافة وحدة واحدة فى الخلية الفارغة التى يتم تقييمها . والوصول الى هذه القيمة للخلية التى يتم تقييمها يكون عن طريق إضافة تكلفة نقل الوحدات الموجودة على المسار فى الخلايا المناظرة . حتي تعير (+) عن إضافة وحدة الي الخلية المناظرة وتعبر (−) عن خصم وحدة من الخلية المناظرة . فعلى سبيل المثال لتحديد مقياس التقييم للخلية بركة السبع / الاسكندرية (خ ٢١) نرجع الى المسار والاشارات الموجودة كما يلى :

جنيه

أضف وحدة للخلية $خ_{٢١}$ ويترتب على ذلك زيادة التكاليف بمقدار ١٠

اطرح وحدة من الخلية $خ_{١١}$ ويترتب على ذلك تخفيض التكاليف بمقدار٨

اطرح وحدة للخلية $خ_{١٢}$ ويترتب على ذلك زيادة التكاليف بمقدار ١٢

اطرح وحدة من الخلية $خ_{٢٢}$ ويترتب على ذلك تخفيض التكاليف بمقداره

وبذلك يكون الأثر النهائي هو + ١٠ – ٨ + ١٢ – ٥ = ٩ وهذا هو مقياس التقييم للخلية $خ_{٢١}$.

وبتكرار نفس الخطوات نصل الى التقييم التالى لباقى الخلايا الفارغة كما يلى :

$خ_{٣١}$ = + ٩ – ٨ + ١٢ – ٥ + ١٤ – ٩ = ١٣

$خ_{٣٢}$ = + ١٥ – ٥ + ١٤ – ٩ = ١٥

$خ_{١٣}$ = + ٧ – ١٤ + ٥ – ١٢ = – ١٤

وكانت $خ_{٢١}$ = + ١٠ – ٨ + ١٢ – ١٤ = ٩

٤ ـ قارن كل مقاييس التقييم للخلايا . فاذا كانت كل الأرقام صفر أو قيما موجبة (*) فإن ذلك يعني أن الحل الحالى هو الحل الأمثل . أما اذا

(*) في حالة تعظيم الربح إذا كانت كل القيم صفرا أوقيما سالبة فإن ذلك بعني أن الحل الحالي هوالحل الأمثل . كما أن وجود صفر بمني إمانية تغيير الحل النهائيل دون أن يؤثر ذلك علي تكلفة النقل الخاصة بالحل الحالي . وتعرف هذه الحالة بحالة وجود أكثر من حل أمثل .

كانت هناك قيمة واحدة على الأقل سالبة فيعنى ذلك أن هذا ليس هو الحل الأمثل ونحتاج الى تعديل لهذا الحل ، حيث يعنى الرقم السالب أن التغيير سوف يحقق خفضا في تكلفة النقل . وبتطبيق ذلك على المثال الحالى نجد أن مقياس التقييم للخلية خ$_{١٢}$ = − ١٤ وهي قيمة سالبة ولذلك يجب تعديل الحل الى حل أفضل .

الخطوة الخامسة : تعديل الحل الحالى :

لتعديل الحل الحالى نقوم باتباع الخطوات التالية :

١ ـ اذا كان هناك أكثر من قيمة سالبة بين مقاييس التقييم للخلايا يتم اختيار الخلية ذات القيمة الأكثر سالبية . وتعنى هذه الخطوة أن الخلية التى سوف يتم اختيارها تعبر عن خلية تعد الآن خلية خاصة بمتغير غير أساسي ولكنها سوف تدخل الحل لتكون خلية مملوءة ، أى لتصبح خاصة بمتغيرا أساسيا . وطالما اننا قد اخترنا القيمة الأكبر سالبية فاننا نختار أفضل تعديل ممكن أن يتم بناءا على دالة الهدف وهى تخفيض التكلفة الاجمالية . وهذه الخطوة هى أشبه بخطوة تحديد المتغير الذى يدخل الحل فى أسلوب السمبلكس .

وبتطبيق ذلك على المثال الحالى ، نجد أننا لدينا قيمة سالبة واحدة . ولذلك ليس أمامنا بديل . فالمتغير الذى سيدخل الحل هو المتغير س$_{١٣}$ والموجود فى الخلية خ$_{١٣}$.

٢ ـ لتحديد أقصى كمية يمكن أن توضع فى هذه الخلية ، يتم الرجوع مرة أخرى الى المسار المغلق الذى استخدم فى تقييم هذه الخلية . ويتم تحديد القيم الموجودة على المسار فى الخلايا الركنية التى بها اشارة سالبة . ثم نقوم باختيار أقل قيمة فيما بينها ونضعها فى الخانة المملوءة الجديدة .

وفى المثال الحالي نجد أن مسار الخلية خ$_{١٣}$ هو

خ$_{١٣}$ ←—— خ$_{٢٣}$ ←—— خ$_{٢٢}$ ←—— خ$_{١٣}$

(+) ←—— (−) ←—— (+) ←—— (−)

والقيم فى الأركان السالبة هى ٢٠ وحدة فى خ$_{٢٢}$ و ٣٠ وحدة فى خ$_{١٢}$.

وبمقارنة القيمتين يتضح أن القيمة الأقل وهى ٢٠ هي التى يجب وضعها فى الخلية خ$_{١٣}$. وتعنى هذه الخطوة أن هناك متغيرا أساسيا جديدا هو س$_{١٣}$ قيمته الآن تساوى ٢٠ فى الحل .

٣ ـ لتحديد الخلية التى يجب تفريغها ، يجب عمل التعديل اللازم فى كل المسار حتى نضمن استمرار تحقق التوازن فى الصفوف والأعمدة . وتشبه هذه الخطوة خطوة تحديد المتغير الذى يخرج من الحل فى أسلوب السمبلكس . فطالما أن هناك متغيرا غير أساسيا أصبح متغيرا أساسيا فيجب أن يخرج متغيرا أساسيا من الحل الحالي .

وذلك للحفاظ على شـرط أن يكـون عـدد المتغيرات الأساسية مساويا للقيمة (عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١) (*) .

وبتطبيق ذلك على المسار الخاص بهذه الخلية الجديدة نجد أنه يجب طرح ذات القيمة من الخلية $خ_{١٣}$ ، وإضافتها الي الخلية $خ_{٢٢}$ ، وطرحها من الخلية $خ_{٢٢}$ ، وطرحها من الخلية $خ_{١٢}$. كما هو مبين فى هذا الشكل المحدود(٢ـ٣).

من / الي	القاهرة	الاسكندرية
دمنهور	١٠	٧٠
أبو حماد	٢٠	

شكل(م٢ـ٣)

وبذلك التعديل يكون الحل الجديد كما هو مبين فى الجدول (٢ـ٤) والذى يتضح منه أن المتغيرات الأساسية هى :

$س_{١١}$ = ١٢٠ ، $س_{١٢}$ = ٢٠ ، $س_{٢٢}$ = ٧٠ ، $س_{١٣}$ = ٢٠ ،

$س_{٣٣}$ = ٦٠ ، كما أن المتغيرات الأساسية هى :

(*) قد يترتب علي هذه الخطوة عدم تحقق هذا الشرط . وسوف نناقش ذلك فيما بعد

$س_{٢١} = س_{٣٢} = س_{٢٣} =$ صفر .

أما تكلفة الحل فيمكن حسابها كما يلى :

التكلفة الكلية للنقل= ١٢٠(٨) + ١٠(١٢) + ٧٠(٥) + ٦٠(٩)

=٩٦٠+ ١٢٠ + ١٤٠ + ٥٤٠

= ٢١١٠ جنيه

ويتضح من هذه القيمة أن الحل الحالي قد ترتب عليه تخفيض التكاليف بما يعادل (٢٣٩٠ ــ ٢١١٠) = ٢٨٠ جنيه . ومن الواضح أن ذلك يمكن الوصول إليه مباشرة عن طريق حساب تكلفة الوفر نتيجة لإضافة عشرون وحدة في الخلية خ١٣ . فكل خلية يترتب عليه خفضا قدره ١٤ جنيه كما أوضحنا عند تقييم الخلية . ولذلك فإن ٢٠ وحدة من المفروض أن يترتب عليها وفرا قدره ٢٠ × ١٤ = ٢٨٠ جنيه.

الخطوة السادسة: كرر نفس الخطوات الرابعة والخامسة :

أولا : تقييم الخلايا الفارغة :

الخلية بركة السبع / الاسكندرية :

المسار $خ_{٢١}$ ←—— $خ_{١١}$ ←—— $خ_{١٢}$ ←—— $خ_{٢٢}$

الإشارات (+) ←—— (−) ←—— (+) ←—— (−)

مقياس التقييم + ١٠ – ٨ + ١٢ – ٥ = ٩

الخلية بركة السبع / المنصورة :

المسار $خ_{٣١} \longrightarrow خ_{١١} \longrightarrow خ_{١٣} \longrightarrow خ_{٢٣}$

الإشارات (+) ⟵ (–) ⟵ (+) ⟵ (–)

مقياس التقييم + ٩ – ٨ + ٧ – ٩ = ١

الخلية دمنهور / المنصورة :

المسار $خ_{٣٢} \longrightarrow خ_{١٢} \longrightarrow خ_{١٣} \longrightarrow خ_{٢٣}$

الإشارات (+) ⟵ (–) ⟵ (+) ⟵ (–)

مقياس التقييم + ١٥ – ١٢ + ٧ – ٩ = ١

الخلية أبو حماد / الاسكندرية :

المسار $خ_{٢٣} \longrightarrow خ_{٢٢} \longrightarrow خ_{١٢} \longrightarrow خ_{١٣}$

الإشارات (+) ⟵ (–) ⟵ (+) ⟵ (–)

مقياس التقييم + ١٤ – ٥ + ١٢ – ٧ = ١٤

وتكون نتيجة تقييم الخلايا هى :

$خ_{٢١}$ = ٩ ، $خ_{٣١}$ = –١ ، $خ_{٣٢}$ = ١ ، $خ_{٢٣}$ = ١٤

ونظرا لوجود رقم سالب في الخلية خ$_{١٣}$ فإنه يجب تعدل الحل وذلك بإدخال المتغير س$_{٣١}$ في الحل . ويعني ذلك محاولة ملء الخلية أقصي عدد من الوحدات .

ثانيا تعديل الحل الحالي :

لتحديد أقصي قيمة يمكن أن توضع في الخلية خ$_{٣١}$ ، يتم حصر عدد الوحدات الموجودة في الأركان السالبة علي مسار التقييم للخلية خ$_{٣١}$ وهذه القيم هي في الخانة خ$_{١١}$ ، خ$_{٢٢}$ وقيمتنها ١٢٠ ، ٦٠ علي التوالي . لذلك يكون للتعديل بإضافة أقل قيمة من بين هاتين القيمتين في الخلية خ$_{٣١}$. وعمل التعديلات اللازمة أفقيا ورأسيا لتحقيق توازن الطاقة والطلب في الصف العمود . ولذلك يكون الحل الجديد كما في الجدول (م ٢ ـ ٥)

من / الي	القاهرة	الأسكندرية	المنصورة	الطاقة
بركة	٨ ٦٠	١٠	٩ ٦٠	١٢٠
السبع	١٢ ١٠	٥ ٧٠	١٥	٨٠
دمنهور	٧ ٨٠	١٤	٩	٨٠
ابو حماد	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

جدول (٢ ـ ٥)

الحل الأمثل لشركة الطوب الأسمنتي

ويتضح من هذا الحل أن المتغيرات الأساسية هي :

$س_{١١} = ٦٠$ ، $س_{٣١} = ٦٠$ ، $س_{١٢} = ١٠$.

$س_{٢٢} = ٧٠$ ، $س_{١٣} = ٨٠$

أما المتغيرات الغير أساسية فهي :

$س_{٢١} = س_{٣٢} = س_{٣٣} =$ صفر

وتكلفة هذا الحل = ٦٠(٨) + ٦٠(٩) + ١٠(١٢) + ٧٠(٥)

+ ٨٠(٧)

= ٤٨٠ + ٥٤٠ + ١٢٠ + ٣٥٠ + ٥٦٠

= ٢٠٥٠ جنيه

وهذه القيمة تعد أقل من تكلفة الحل السابق بمقدار (٢١١٠ ـ ٢٠٥٠) = ٦٠ جنيه وهو عبارة عن إجمالي الوفر نتيجة لإضافة ٦٠ وحدة بالخلية خ٣١ حيث تحقق كل وحدة مضافة خفضا قدره جنيه واحد كما أوضحنا عند تقييم هذه الخلية .

ثالثا : تقييم الخلايا الفارغة :

الخلية بركة السبع / الاسكندرية :

المسار $خ_{٢١} \longrightarrow خ_{١١} \longrightarrow خ_{١٢} \longrightarrow خ_{٢٢}$

الإشارات (+) ←—— (–) ←—— (+) ←—— (–)

مقياس التقييم + ١٠ – ٨ – ١٢ + ٥ = ٩

الخلية دمنهور / المنصورة :

المسار خ٣٢ ←—— خ٢١ ←—— خ١١ ←—— خ١٢

الإشارات (+) ←—— (–) ←—— (+) ←—— (–)

مقياس التقييم + ١٥ – ٩ + ٨ – ١٢ = ٢

الخلية أبو حماد / الاسكندرية :

المسار خ٢٣ ←—— خ٢٢ ←—— خ١٢ ←—— خ١٣

الإشارات (+) ←—— (–) ←—— (+) ←—— (–)

مقياس التقييم + ١٤ – ٥ + ١٢ – ٧ = ١٤

الخلية أبو حماد / المنصورة :

المسار خ٣٢ ←—— خ٣١ ←—— خ١١ ←—— خ١٣

الإشارات (+) ←—— (–) ←—— (+) ←—— (–)

مقياس التقييم + ٩ – ٩ + ٨ – ٧ = ١

وتكون نتيجة تقييم الخلايا هي :

$خ_{٢١} = ٩ ، خ_{٣٢} = ٢ ، خ_{٢٣} = ١٤ ، خ_{٣٣} = ١$

وحيث أن كل أرقام التقييم قيما موجبة فإن ذلك يعني أن هذ هو الحل الأمثل .

وبترجمة هذا الحل النهائى الأمثل في شكل قرارات في حالة شركة الطوب الأسمنتي ، يمكن أن يوضع كما يلي :

يتم إمداد عمليات البناء في القاهرة والتي تحتاج إلي ١٥٠ ألف وحدة بستون ألفا من مصنع بركة السبع ، وعشرة آلاف من مصنع دمنهور وثمانون ألفا من مصنع أبو حماد . أما احتياجات مدنية الاسكندرية فيجب استيفاءها بالكامل من مصنع مدينة دمنهور . كذلك فإن احتياجات مدينة المنصورة وهي ستون ألفا فيتم نقلها إليها من مصنع مدينة بركة السبع .

ويهمنا في نهاية هذا الحل أن نوضح أن طريقة السير في الحجر هي طريقة فعالة في حالة مشاكل النقل محدودة الحجم . أما بالنسبة لمشاكل التوزيع الكبيرة فإن طريقة التوزيع المعدل MODI في الوصول إلي الحل الأمثل هي التي ينصح عادة باستخدامها .

طريقة التوزيع المعدل (MODI) :

تعتمد طريق التوزيع المعدل Modified Distribution والمعروفة بإختصار MODI علي فكرة تحويل مشكلة النقل في صورة البرمجة

الخطية إلي الصيغة الثنائية Duality ثم التوصل إلي حل للصيغة الثنائية يمكن منه معرفة الحل الخاص بمشكلة النقل الأصلية . وعلي الرغم من صعوبة الإثبات الرياضي الخاص بتلك الطريقة إلا أنها تتميز بالسهولة واليسر عند الإستخدام كأسلوب لإختبار مثالية الحل الخاص بمشكلة النقل . وتقوم الخطوات الأساسية لتلك الطريقة . علي ما يلي :

(١) أضف عمود يسمي u ، وصف يسمي v لمصفوفه الحل المبدئي الذي توصلت إليه في الخطوات السابقة بأستخدام أي من طرق الوصول إلي الحل المبدئي الذي ذكرناها من قبل .

(٢) إفترض القيمة « صفر » في أحد خلايا العمود u أو الصف v ، وعادة ما يتم افتراض قيمة « صفر » في الخلية الخاصة بتقاطع الصف الأول من المصفوفة مع عمود u . ومعني ذلك أن .

صفر = " u "

(٣) بالنسبة للقيم المقابلة للخلايا المملوءة (خلايا المتغيرات الأساسية) في مصفوفة الحل المبدئي ، حدد القيم الخاصة بها u_{ij} ، v_{ij} في العمود u ، الصف v ، وذلك بإستخدام المعادلة .

$$C_{ij} = u_{ij} + v_{ij}$$

لكل الخلايا المملوءة ، وعلي أساس أن

Cij هي قيمة تكلفة نقل الوحدة من المصدر i إلي الموقع j ، والتي توجد في الركن العلوي من الخلية .

(٤) أحسب معاملاً I_{ij} لكل خلية غير مملؤة (متغيراً غير أساسياً) يعبر عن نتيجة تقييم تلك الخلية ، ويكون ذلك بإستخدام المعادلة .

$$I_{ij} = C_{ij} - (u_{ij} + v_{ij})$$

(٥) إذا كانت هناك علي الأقل قيمة واحدة سالبة بين قيم المعامل I_{ij} فيعني ذلك أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل ، أما إذا كانت كل القيم صفرية أو سالبة فيعني ذلك أن الحل الحالي هو الحل الأمثل .

وسوف نقوم فيما يلي بتطبيق تلك الخطوات علي مثالنا الخاص بشركة الطوب الأسمنتي .

(١) إضافة العمود u والصف v إلي جدول الحل المبدئي الذي توصلنا إليه بإستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي وتحديد تم U ، V الخاصة بالخلايا المملؤة .

من / الي	القاهرة	الأسكندرية	المنصورة	الطاقة	u
بركة السبع	٨ ١٢٠	١٠	٩	١٢٠	صفر
دمنهور	١٢ ٣٠	٥ ٥٠	١٥	٨٠	٤
أبو حماد	٧	١٤ ٢٠	٩ ٦٠	٨٠	١٣
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠ / ٢٨٠	
v	٨	١	- ٤		

ويلاحظ علي هذا الجدول أننا بدأنا بوضع صفر في الخلية(بركة السبع / u) وعلي ذلك فإن الخلية (v / القاهرة)

= ٨ - صفر = ٨

ومنها فإن الخلية (دمنهور /u)

= ١٢ - ٨ = ٤

ومنها فإن الخلية (v / الأسكندرية)

= ٥ - ٤ = ١

ومنها فإن الخلية (أبو حماد /u)

= ١٤ - ١ = ١٣

ومنها فإن الخلية (v / المنصورة)

= ٩ - ١٣ = -٤

(٢) حساب معاملات u ، v الخاصة بالخلايا الفارغة يكون علي النحو التالي :

I (بركة السبع / الأسكندرية) = 10 - (0 + 1) = 9

I (بركة السبع /المنصورة) = 9 - (0 - 4) = 13

I (دمنهور /المنصورة) = 15 - (4 - 4) = 15

I (أبو حماد/القاهرة) = 7 - (13 + 8) = - 14

ويجب أن نلاحظ هنا أن نتيجة التقييم الحالية تتطابق مع نفس نتيجة التقييم التي قمنا بها من قبل بإستخدام طريقة السير علي الحجر ، وذلك دون معاناه تحديد المسارات لكل الخلايا الفارغة .

وتوضح تلك الأرقام أن هناك قيمة سالبة (-١٤) ويعني ذلك أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل ويجب تعديل الحل .

(٣) حتي يمكن تعديل الحل يجب إختيار المعامل الأكثر سالبية ، وهو في مثالنا الخاص بالخلية (أبو حماد / القاهرة) وتعديل الحل عن طريق مليء هذه الخلية بأكبر عدد من الوحدات لتحقيق أقصي وفر ممكن .

(٤) حتي يمكن عمل التعديل ، يجب تحديد مساراً مغلقاً

(كما فعلنا عند إستخدام أسلوب السير علي الحجر) للخلية التي سوف تصبح مملؤة (متغيراً أساسياً) وهي (أبو حماد / القاهرة) . ويكون المسار في هذه الحالة هو

(أبو حماد/القاهرة) ← (أبو حماد/الأسكندرية) ← (دمنهور/الأسكندرية) (دمنهور/القاهرة)

+ ١   - ١   + ١   -١ ←

(٥) لتحديد أقصي قيمة يمكن وضعها في الخلية (أبو حماد / القاهرة) فإنه يجب تحديد القيم الحالية الموجودة في الخلايا الركنية السالبة (التي مشار إليها بـ - ١) الموجودة علي المسار الذي تم تحديده ، ثم يتم بعد ذلك إختيار أقل تلك القيم لوضعها في الخلية (أبو حماد / القاهرة) . وفي المثال الحالي أمامنا قيمتين هما ٢٠ ، ٣٠ يتم إختيار أقلها وهو ٢٠ وحدة فقط يتم وضعها في الخلية (أبو حماد / القاهرة وتعديل باقي المسار بها مع نقل باقى القيم كما هي كما في الجدول التالي :

من / الي	القاهرة	الأسكندرية	المنصورة	الطاقة	u
بركة السبع	$\boxed{٨}$ ١٢٠	$\boxed{١٠}$	$\boxed{٩}$	١٢٠	صفر
دمنهور	$\boxed{١٢}$ ١٠	$\boxed{٥}$ ٧٠	$\boxed{١٥}$	٨٠	٤
أبو حماد	$\boxed{٧}$ ٢٠	$\boxed{١٤}$	$\boxed{٩}$ ٦٠	٨٠	١-
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠ / ٢٨٠	
٧	٨	١	١٠		

وتكون تكلفة الحل الحالي =

٥ × ٧٠ + ١٢ × ١٠ + ٨ × ١٢٠

= ٩ × ٦٠ + ٧ × ٢٠ +

ومن المتوقع أن تقل تلك التكاليف عن تكلفة لحل المبدئي بما يعادل

٢٨٠ = (٢٠ × ١٤)

(٦) يجب تكرار نفس الخطوات السابقة إلي أن يتم التأكد من أن الحل الجديد هو حلاً أمثل . ففي المثال الحالي بتكرار الخطوات نري أن القيم الجديدة u ، v كما في الجدول السابق ، وعليه فإن معاملات التقييم لخلايا الفارغة تكون كما يلي :

$I_{(\text{بركة السبع / الأسكندرية})} = 10 - ($ صفر $+ ١) = 9$

$I_{(\text{بركة السبع /المنصورة})} = 9 - ($ صفر $+ 10) = -1$

$I_{(\text{دمنهور /المنصورة})} = 15 - (4 - 10) = 1$

$I_{(\text{أبو حماد/الأسكندرية})} = 14 - (-1 + 1) = 14$

ويعني وجود قيماً سالبة أن الحل الحالي ليس الحل الأمثل ويكون الجدول التالي كما يلي بعد ملء الخلية (بركة السبع / المنصورة) بأكبر عدد ممكن من الوحدات وعمل التعديلات اللازمة .

من / الي	القاهرة	الأسكندرية	المنصورة	الطاقة	u
بركة السبع	٨ / ٦٠	١٠	٩ / ٦٠	١٢٠	صفر
دمنهور	١٢ / ١٠	٥ / ٧٠	١٥	٨٠	٤
أبو حماد	٧ / ٨٠	١٤	٩	٨٠	١-
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠ / ٢٨٠	
٧	٨	١	٩		

ومن الجدول يمكن حساب معاملات التقييم على النحو التالي

I (بركة السبع / الأسكندرية) = 10 - (zerw + ١) = 9

I (دمنهور /المنصورة) = 15 - (4 + 9) = 2

I (أبو حماد/الأسكندرية) = 14 - (- 1 + 1) = 14

I (أبو حماد /المنصورة) = 9 - (- 1 + 9) = 1

وحيث أن كل القيم موجبة فإن الحل الحالي هو الحل الأمثل .

حالة عدم التوزان في مشكلة النقل :

أوضحنا فيما سبق أن استخدام أسلوب النقل يقتضي أن تكون مشكلة النقل متوازنة . ويعني ذلك أن إجمالي الكميات المطلوب

نقلها (الطاقات) يساوي تماما إجمالي الكميات المطلوبة في مراكز التوزيع . ولذلك فإن القيام بعمل الموازنة يعد خطوة أساسية بالنسبة للمشاكل الغير متوازنة قبل إمكانية استخدام أسلوب النقل في حلها. وقد ينجم عدم التوازن هذا عن زيادة الكميات المطلوب نقلها (الطاقات) عن الكميات اللازمة (الطلب) ، أو بسبب زيادة الكميات اللازمة (الطلب) عن الكميات المطلوب نقلها (الطاقات) . وسف نعرض لكيفية معالجة ذلك في الحالتين :

١ ـ وجود طاقات أكبر من الطلب :

يوضح الجدول (٢ ـ ٦) مثالا علي حالة عدم الانتظام ، حيث يزيد إجمالي الطاقة المتاحة بمقدار ٤٠٠ وحدة عن الطلب الإجمالي . وفي هذه الحالة سوف يكون هناك بالضرورة ، في أى حل من الحلول ،

من / الي	س	ص	ع	الطاقة
أ	٢	٣	١	٢٠٠٠
ب	٤	٢	٤	١٠٠٠
الطلب	٨٠	١٢٠٠	٦٠٠	٣٠٠٠ / ٢٤٠٠

جدول (م ٢ ـ ٦)

حالة عدم التوازن (الطاقة > الطلب)

ما قيمته ٤٠٠ وحدة لا يتم نقلها . ومثل هذا الجدول يتم توازنه عن طريق إضافة ما يسمي بمركز التوزيع الوهمي والذي يعبر عن طلب وهمي لا يوجد أصلا Dummy demand ، ويضاف له عمود جديد تكون القيمة الموجودة في آخره في أسفل الجدول معادلة للفرق بين إجمالي الطاقة وإجمالي الطلب وهو ٤٠٠ وحدة . وتكلفة نقل الوحدة في أى خلية في هذا العمود الوهمي هي صفرا . وهذه القيمة الصفرية لا تسبب تفضيلا لمصدر معين علي آخر أو تفضيلا لمركز توزيع علي آخر . ولكنها تسهل العمليات الحسابية . وتظهر المشكلة متوازنة في الجدول (٢ ـ ٧) . ثم يتم القيام بالحل بنفس الخطوات التي أوضحناها من قبل .وعند وجود قيمة في أحد الخلايا الموجود في العمود الوهمي، فإن ذلك يعني أنها كميات من الطاقة سوف لا يتم نقلها ، لأنه لا يوجد أصلا هذا الطلب الوهمي . ومثال ذلك إذا كانت س أو تعادل ٢٠٠ وحدة فى أحد الحلول لهذا المثال فإن ذلك يعني أن المصنع (أ) سوف لا ينقل ٢٠٠ وحدة من إنتاجه ولكنها سوف تظل في المصنع ، وبالتالي فهي إما مخزونة أو طاقة غير مستغلة إذا لم يتم انتاجها أصلا .

من / إلي	س	ص	ع	و (وهمي)	الطاقة
أ	٢	٣	١	صفر	٢٠٠٠
ب	٤	٢	٤	صفر	١٠٠٠
الطلب	٨٠	١٢٠٠	٦٠٠	٤٠٠	٣٠٠٠

جدول (م ٢ ـ ٧)

حالة عدم التوازن (الطاقة > الطلب) بعد توازنها

٢ ـ وجود طلب أكبر من الطاقات المتاحة :

يوضح الجدول (٢ ـ ٨) مثالا علي حالة عدم الانتظام ، حيث يزيد إجمالي الطلب اللازم وقدره ٢٦٠٠ وحدة علي إجمالي الطاقة المتاحة وقدرها ٢١٠٠ وحدة . وفي هذه الحالة يكون من الضروري عمل التوازن عن طريق إضافة ما يسمي بالمركز الوهمي أو الطاقة الوهمية Dummy source ويتم التعبير عنه بإضافة صف جديد تكون القيمة في آخره معادلة للفرق بين إجمالي الطلب وإجمالي الطاقة وقدره ٥٠٠ وحدة في هذا المثال . وكما هو الحال عند إضافة عمودا وهميا ، فإن تكلفة نقل الوحدة في أي خلية تقع علي هذا الصف تكون دائما صفر . ويرجع ذلك إلي أنه أصلا لايتم نقلها ، فهي غير موجودة أصلا في مراكز الإنتاج . والسبب بسيط ، فمركز الإنتاج

من / إلى	س	ص	ع	الطاقة
أ	٢	٣	١	١٠٠٠
ب	٤	٢	٤	١١٠٠
الطلب	٨٠	١٢٠٠	٦٠٠	٢١٠٠ / ٢٦٠٠

جدول (م ٢ ـ ٨)

الجديد هو مركز وهمي . ويظهر ذلك في الجدول (٢ ـ ٩) .

من / إلى	س	ص	ع	الطاقة
أ	٢	٣	١	١٠٠٠
ب	٤	٢	٤	١١٠٠
و(وهمية)	صفر	صفر	صفر	٥٠٠
الطلب	٨٠	١٢٠٠	٦٠٠	٢٦٠٠

جدول (م ٢ ـ ٩)

وعند إتمام الحل النهائى لهذه المشكلة ، فإن القيمة التي تظهر في أى خلية من الصف الوهمي تعني أن ذلك عبارة عن عدد وحدات الطلب التي لم يتم الوفاء بها . ومثال ذلك إذا كانت س$_{وص}$ = ٤٠٠

وحدة فإن ذلك يعني أن هناك ٤٠٠ وحدة لم ولن يمكن أن يتم الوفاء بها لمركز التوزيع ص . وذلك بسبب عجز طاقة الانتاج عن تحقيقها .

مشكلة عدم الانتظام Degeneracy :

إذا كان في مشكلة النقل من موقع من مواقع الانتاج (المصادر) وفيها أيضا ك مركز من مراكز التسويق (المراكز) فإن عدد القيود الخاصة بهذه المشكلة، كمشكلة برمجة خطية يكون هو (م+ ك) وهو بالتمام (عدد الصفوف + عدد الأعمدة). ونظرا لأن استخدام أسلوب النقل يقتضي أن تكون مشكلة النقل متوازنة ، حتي إذا تمت موازنة مصطنعة للمشكلة ، فإن أحد هذه القيود سوف يكون قيدا زائد ا redundent كما أوضحنا في جزء سابق.وحيث أن عدد المتغيرات الأساسية يجب أن يعادل عدد القيود الفعالة عند حل المعادلات الخطية معا ، فإن عدد المتغيرات الأساسية يجب أن يساوي (م + ك ـ ١) وإذا كان عدد الخلايا المملوءة أقل من (م + ك – ١) .في أحد الحلول فإن هذه الحالة تعرف رياضيا بحالة عدم الانتظامDegeneracy.

وعملياً يمكن أن تظهر حالة عدم الإنتظام في موقعين . أما الأول فهو عندما تقوم بعمل الحل المبدئي وذلك بسبب أن أحد أرقام الطاقة تساوي أحد أرقام الطلب . ومثال ذلك الجدول (٢ –١٠) ، والذي يوضح أن إستخدام أسلوب الركن الشمالي الشرقى سوف يترتب عليه أن تملئ الخلية (أس) بالقيمة ٩٠ مما يؤدى إلى إستبعاد خلية وصف في ذات الوقت وقد أى ذلك ، وبعد ذلك إكتمال الوزيع أي أن اصبح عدد الخلايا المملوه هو ٣ بدلاً من (٢+٣-١) = ٤)

عليه أن تملاء الخلية (أ س) بالقيمة ٩٠ مما يؤدي إلي إستبعاد خلية وصف في ذات الوقت . وقد أدي ذلك ، وبعد إكتمال التوزيع إلي أن أصبح عدد الخلايا المملوءة هو ٣ بدلاً من (٢ + ٣ - ١ = ٤) .

من / إلي	س	ص	ع	الطاقة
أ	٣ / ٩٠	٤	٢	٩٠
ب	١	٢ / ٣٠	٥ / ٢٠	٥٠
الطلب	٩٠	٣٠	٢٠	١٤٠

الجدول (٢ - ١٠)

كذلك أيضاً فإن حالة عدم الإنتظام يمكن أن تظهر أثناء القيام بخطوة تحسين الحل الحالي . ويكون ذلك عندما تتعادل كميات أثنين أو أكثر من الخلايا التي يتم تفريغها (التي بها إشارة سالبة) . فسوف يتم تفريغهم جميعاً في ذات الوقت ، علي الرغم من أن الخلية التي يتم ملئها هي واحدة فقط ، وسوف يخل ذلك بشرط عدد المتغيرات الأساسية في حالة الإنتظام .

ونظراً لأن الحل الذي يعاني من مشكلة عدم الإنتظام لا يمكن إختبار مثاليته عن طريق الأساليب المعروضة سابقاً ، فيجب عمل بعض التعديل قبل إمكانية الإستمرار في مثل هذه الحالة . وسوف نتناول كيفية المعالجة ني الحالتين السابقتين في الجزء التالي .

أولاً : عدم الإنتظام يظهر خلال الحل المبدئي :

في هذه الحالة يكون التعديل اللازم في هذه بسيط ، وسهل القيام به . ويتلخص في أن يتم وضع قيمة صغيرة جداً (قريبة القيمة من الصفر (*)) ، ولتكن (ص) في واحدة (أو أكثر) من الخلايا الفارغة في الحل المبدني ، حتي يجعل ذلك عدد الخلايا المملوءة = (م + ك - ١) . والقاعدة الأفضل هي أنه في حالة تقليل التكاليف يتم وضع القيمة (ص) في الخلية الفارغة ذات تكلفة نقل الوحدة الأقل والتي تظل تسمح بإتمام إختبار مثالية الحل . فإذا كانت تركيبة الخلايا المملوءة بشكل يجعل من الصعب إجراء هذا الإختبار بعد أن وضعت (ص) في الخلية الأقل تكلفة وأصبح عدد الخلايا المملوءة = (م + ك -١) ، فإن القيمة (ص) يجب إستيعادها من هذه الخلية ووضعها في الخلية التي تلي الخلية الفارغة السابقة من حيث تكلفة النقل ، ويجب أن نشير إلي أنه يمكن أن يوجد في جدول النقل أكثر من (ص) في وقت واحد للمساعدة في تقييم الخلايا . كما أنه بمجرد إضافتها يظل وجوها إلي أن لا تكون هناك حاجة إليها . وفي حالة تعظيم الربح تتم خطوات مشابهة مع أفضلية وضع (ص) في الخلية ذات الربح الأعلي للوحدة .

يوضح الجدول (٢ - ١١) حالة تقليل التكلفة والذي تظهر فيه مشكلة عدم الإنتظام خلال الحل المبدئي بإستخدام طريقة الركن

(*) هذه القمة الصغيرة تعامل علي أنها صفر معالجتها في تحويل عدد وحدات من خلية إلي أخري . وتعامل دائماً في كل الخطوات علي أنها خلية مملوءة .

الشمالي الشرقي ، وعند محاولة القيام بتقييم الخلايا الفارغة ، نجد أننا سوف نواجه بمشكلة عدم الإنتظام فالخلية (أ ص) يكون من الصعب عمل مسار مغلق لها حسب القواعد التي وضعناها من قبل للمسار المغلق . كذلك فإن الخلايا (أ ع) ، (ن س) سوف تواجه نفس المشكلة (تذكر أننا أوجبنا أن تكون أركان المسار جميعها في خلايا مملوءة ، وبسبب النقص في عدد الخلايا المملوءة واجهنا هذه المشكلة) . وكما ذكرنا من قبل فإننا سوف نحاول وضع القيمة (ص) بشكل يسمح بالقيام بعملة التقييم ، ولنحاول الآن الخلية (ن س) نظراً لأن بها أقل تكلفة نقل للوحدة من بين كل الخلايا الفارغة كما في الجدول التالي (٢ - ١١) .

من / إلي	س	ص	ع	الطاقة
أ	٣ / ٩٠	٤	٢	٩٠
ب	١ / (ص)	٢ / ٣٠	٥ / ٢٠	٥٠
الطلب	٩٠	٣٠	٢٠	١٤٠

جدول (٢ - ١١)

ويتــأمل هذا الجــدول نجد أنه بالإمكان القيام بعمل تقييم لكل الخلايــا الفارغة بناء علي هذه الإضافة، وعلي إعتبار أن الخلية (ن س) أصبحت خلية مملوءة . كذلك فإن عدد الخلايا المملــوءة الآن = (٢ + ٣ - ١) = ٤ .

تقييم الخلية (أ ص) هو (أ ص) ---> (أ س) ---> (ب س) ---> (ب ص) .

+ ٤ - ٣ + ١ - ٢ = صفر

تقييم الخلية (أ ع) هو (أ ع) --> (أ س) --> (ب س) ---> (ب ع) .

+ ٢ - ٣ + ١ - ٥ = -٤

ويعني ذلك أن هذا ليس هو الحل الأمثل ويتم تعديل الحل بملء الخلية (أ ع) بأقصي قيمة ممكنة وهي . ٢ وحدة . ويكون التعديل الواجب كما في الجدول (٢ - ١٢) والذي يلاحظ منه أن (ص) إختفت تلقائياً . وتم معاملتها علي أنها صفر عندما تم إضافة ٢٠ وحدة إليها لضمان شرط التوازن في الجدول . وعند تقييم الخلايا الفارغة (أ ص) ، (ن ع) نجد أن نتيجة التقييم هي صفر ، ٥ علي التوالي . حيث أن كليهما قيما موجبة فإن ذلك يعني أن الحل الذي بين أيدينا هو الحل الأمثل .

من / إلي	س	ص	ع	الطاقة
أ	٣ ٧٠	٤	٢ ٢٠	٩٠
ب	١ ٢٠	٢ ٣٠	٥	٥٠
الطلب	٩٠	٣٠	٢٠	١٤٠

جدول (٢ - ١٢)

ثانياً : عدم الإنتظام يظهر أثناء تعديل الحل :

ويقصد بذلك أن يترتب علي تعديل الحل الحالى أن يتم تفريغ خليتين مع ملء خلية واحدة فقط . ويمكن التغلب علي ذلك عن طريق إضافة القيمة الصغري (ص) في أحد الخلايا التي تم تفريغها ، ويستمر الحل كالمعتاد . فإذا كان الحل المبدئي (أو المرحلي) الذي أمامنا هو كل في لجدول(٢ - ١٣) والذي يتضح منه أننا أمام حلا ممكنا وأساسياً نظراً لأن عدد الخلايا المملوءة = (٣ + ٢ - ١) = ٤ ، فتكون الخطوة التالية هي تقييم الخلايا كما يلي :

من / إلي	س	ص	ع	الطاقة
أ	٣ / ٢٠	٤ / ٣٠	٢	٥٠
ب	٢ / ٣٠	٢	١ / ٤٠	٧٠
الطلب	٥٠	٣٠	٤٠	١٢٠

جدول (٢ - ١٣)

الخلية (أ ع) :

المسار هو(أ ع) <--- (أ س) <--- (ب س) <--- (ب ع)

التقييم + ٢ - ٣ + ٢ - ١ = صفر .

الخلية (ب ص) :

المسار هو(ب ص) <---(أ ص) <---(أ س) <---(ب س)

التقييم + ٢ - ٤ + ٣ - ٢ = -١ .

ويعني ذلك أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل ويجب التعديل. ويكون التعديل بأضافة وحدات إلي الخلية الفارغة (ب ص) بأقصي قدر ممكن ، وأقصي قدر ممكن هو ٣٠ وحدة ـ ولكن سوف يترتب علي وضع ٣٠ وحدة في هذه الخلية تفريغ الخلايا (أ ص) ، (ب ص) ، (ب ص) في ذات الوقت حتي يتم الحفاظ علي التوازن الرأسي والأفقي كما هو واضح في الجدو (٢- ١٤) ـ ويعاب علي

من / إلي	س	ص	ع	الطاقة
أ	٣ ٥٠	٤	٢	٥٠
ب	٢ (ص)	٢ ٣٠	١ ٤٠	٧٠
الطلب	٥٠	٣٠	٤٠	١٢٠

جدول (٢ - ١٤)

مثل هذه الخطوة أن عدد الخلايا المملوءة الآن ليس معادلاً لأربعة ، وعلي ذلك فإننا بذلك قد تسببنا في أن تكون المشكلة غير منتظمة ـ ولمعالجة ذلك نقوم بوضع تلك القيمة الصغيرة (ص) في أي من الخانتين اللتين تم تفريغهما وهما (ب س) ، (ب ص) ولتكن الخانة (ب س)هي التي يتم وضعها فيها كما في الجدول. وذلك وضع يمكننا من إختبار مثالية الحل مرة أخري والإستمرار في الحل حتي آخره ـ

وجدير بالذكر هنا أن نشير إلي أنه إذا كانت هذه القيمة الصغري (ص) هي التي تحكم عدد الوحدات التي يجب أن تنقل إلي الخلية الفارغة ، فإن (ص) يتم نقلها إلي الخلية الجديدة ، كما

تتم إضافتها أو خصمها بين الخلايا الأخري علي أنها قيمة صغيرة لا تؤثر في القيم الموجودة أصلا. ويوضح المثال التالي هذه الحالة .( ) .

مثال

في أحد مراحل الحل كان جدول النقل علي النحو التالي :

من \ إلي	س	ص	ع	ل	ك	الطاقة
أ	٩ (ص)	٩ ١٣٠	١١ ٦٠	٧	١١	١٩٠
ب	١١ ١٢٠	٩	٧	١٣ ١٦٠	١٥	٢٨٠
جـ	١٣	١١	٩	١٥ ١٠	١٣ ٢٤٠	٢٥٠
الطلب	١٢٠	١٣٠	٦٠	١٧٠	٢٤٠	٧٢٠

ونظراً لأن عدد الخلايا المملوءة = ٦ وهو أقل من (عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١) فقد إستلزم الأمر إضافة (ص) في أحد الخلايا ولتكن أ س . والان ، عند تقييم الخلايا لإختبار مثالية الحل نجد أن الخلية أ ك هي التي تحوي أكثر مقاييس التقييم سالبة ، وكان مسارها كما يلي :

الخلية أ ك :

المسار خ أك ← خ أس ← خ ب س ← خ ب ك ← خ جـ ك ← خ

نتيجة التقييم + ١١ - ٩ + ١ - ١٣ + ١٥ - ١٣ = -٨

ولعمل التعديل اللازم يجب تحديد أقصي قيمة يمكن وضعها في الخلية أ ك ، وفي هذه الحالة نجد أنها هي القيمة (ص) ولذلك يكون

التعديل ، وعلي أساس أن (ص) قيمة صغيرة جداً ، علي النحو التالي :

من \ إلي	س	ص	ع	ل	ك	الطاقة
أ	٩	٩ ١٣٠	١١ ٦٠	٧	١١ (ص)	١٩٠
ب	١ ١٢٠	٩	٧	١٣ ١٦٠	١٥	٢٨٠
جـ	١٣	١١	٩	١٥ ١٠	١٣ ٢٤٠	٢٥٠
الطلب	١٢٠	١٣٠	٦٠	١٧٠	٢٤٠	٧٢٠

جدول حالة إنتقال القيمة الصغري إلي خلية أخري عند وجودها علي خلية ركنية سالبة .

حالة وجود أكثر من حل أمثل Multiple Optimal Solutions

إذا كانت نتيجة التقييم للخلايا الفارغة جميعاً قيماً غير سالبة فإن ذلك يعني أن الحل الحالي هو الحل الأمثل . ومع ذلك ، فإن وجود قيمة صفرية كمقياساً للتقييم فى هذه المرحلة يعني أنه من الممكن تغيير الحل الحالي مع عدم تغيير تكلفة النقل الإجمالية . ويعني ذلك إمكانية تغيير المتغيرات الأساسية مع عدم تغيير دالة الهدف كما في ظل أسلوب السمبلكس .

مثل

بفرض أن الجدول التالي هو جدول النقل النهائي والذي يعبر عن

من / إلي	س	ص	ع	الطاقة
أ	٨ ‏ ٧٠	٥	٦ ‏ ٥٠	١٢٠
ب	١٤	١٠ ‏ ٧٠	١٢ ‏ ١٠	٨٠
جـ	٣ ‏ ٨٠	٩	١٠	٨٠
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

الحل الأمثل ، فإن تقييم الخلايا الفارغة يوضح أن كل مقاييس لتقييم قيماً غير سالبة والتكلفة الإجمالية قدرها ١٩٢٠جنيه . ولكن تقييم الخلية خ ب س يعطي قيمة صفرية . ويعني ذلك أنه يمكن عمل تعديل عن طريق ملء هذه الخلية بأقصي عدد من الوحدات مع تعديل الصفوف والأعمدة دون أن يؤثر ذلك علي إجمالي التكلفة .

خ ب س ← خ ب ع ← خ أ ع ← خ أ س

أثر التقييم + ١٤ - ١٢ + ٦ - ٨ = صفر

وأقصي قيمة يمكن أضافتها والخلية خ ب س هي ١٠ وحدات ويكون الحل الجديد هو كما في الجدول التالي والذي علي الرغم من تغيير الحل به يؤدي إلي نفس التكاليف وهي ١٩٢٠ جنيه .

من / إلي	س	ص	ع	الطاقة
أ	[٨] ٦٠	[٥]	[٦] ٦٠	١٢٠
ب	[١٤] ١٠	[١٠] ٧٠	[١٢]	٨٠
جـ	[٣] ٨٠	[٩]	[١٠]	٨٠
الطلب	١٥٠	٧٠	٦٠	٢٨٠

حالة عدم إمكانية إستخدام أحد المسارات Prohibited Routes

في بعض مواقف الحياة العملية والخاصة بمشكلة التوزيع يكون من الصعب ، بل من المحال ، نقل كميات من بعض المصادر إلي بعض مراكز التوزيع . وقد يرجع ذلك إلي عدم وجود وسائل مواصلات تربط قد يكون هذا المسار غير مأمون بسبب وجود بعض المخاطر أثناء عملية النقل كذلك قد يكون المنتج الذي يتم توزيعه يتعرض للتلف السريع وليس من المنتج نقله لبعد المسافة بين المصدر ومركز التوزيع . وفي مثل هذه الحالات يمكن إستخدام أسلوب النقل مع تعديل طفيف . وهذا التعديل هو إضافة إستخدام تكلفة نقل عالية جداً (أكبر من أية قيمة أخري موجودة في الجدول) في الخلية المطلوب إستبعادها من العمليات الممكنة . وهذه الخطوة تشبة خطوة إضافة قيمة كبري موجبة (في حالة تقليل التكاليف) وقيمة كبري سالبة (في حالة تعظيم الأرباح) في دالة الهدف للمتغيرات الوهمية التي يراد أن تخرج من الحل أثناء تعديل الحل .

أمثلة محلولة

المثال الأول :

فيما يلي بيانات تكلفة نقل الوحدة بالجنية وبيانات الطاقة والطلب الخاصة بأحد مشاكل النقل . أوجد الحل المبدئي والحل الأمثل لهذه المشكلة .

من \ إلي	س١	س٢	س٣	الطاقة
م١	٥ جنيه	٤	٣	١٠
م٢	٧	٢	٥	٢٠
م٣	٣	٤	٢	٣٠
الطلب	١٠	٢٨	٢٢	٦٠

الخطوة الأولي : إيجاد الحل المبدئي

أولاً : الحل المبديء بإستخدام طريقة الركن الشمال الشرقي :

من \ إلي	س١	س٢	س٣	الطاقة
م١	[٥] ١٠	[٤]	[٣]	١٠
م٢	[٧]	[٢] ٢٠	[٥]	٢٠
م٣	[٣]	[٤] ٨	[٢] ٢٢	٣٠
الطلب	١٠	٢٨	٢٢	٦٠

ثانياً : الحل المبدئي بإستخدام طريقة أقل التكاليف :

من / إلي	س ١	س ٢	س ٣	الطاقة	
م ١	$\boxed{٥}$ ٢	$\boxed{٤}$ ٨	$\boxed{٣}$	١٠	صفر
م ٢	$\boxed{٧}$	$\boxed{٢}$ ٢٠	$\boxed{٥}$	٢٠	–٢
م ٣	$\boxed{٣}$ ٨	$\boxed{٤}$	$\boxed{٢}$ ٢٢	٣٠	–٢
الطلب	١٠	٢٨	٢٢	٦٠	
	٥	٤	+٤		

ثالثاً : الحل المبدئىء بإستخدام طريقة فوجال التقريبية

من / إلي	س ١	س ٢	س ٣	الطاقة	u 1	u 2	
م ١	$\boxed{٥}$	$\boxed{٤}$ ٨	$\boxed{٣}$ ٢	١٠	١	١	١
م ٢	$\boxed{٧}$	$\boxed{٢}$ ٢٠	$\boxed{٥}$	٢٠	٣		
م ٣	$\boxed{٣}$ ١٠	$\boxed{٤}$	$\boxed{٢}$ ٢٠	٣٠	١	١	٢
الطلب	١٠	٢٨	٢٢				
V 1	٢	٢	١				
V 2	٢	صفر	١				
		صفر	١				

وبتأمل الحل المبدئي الذي توصلنا إليه بأستخدام طريقة الركن

الشمالي الشرقي نجد أنه حلاً غير أساسياً ويرجع ذلك إلي أن عدد الخلايا المملوءة أقل من (عدد الصفوف + عدد الأعمدة - ١) - أي أن عدد الخلايا المملوءة = ٤ هو أقل من العدد الواجب وهو ٥ .

أما الحل الذي توصلنا إليه بأستخدام طريقة أقل التكاليف فهو حلاً ممكناً . حيث أن عدد الخلايا المملوءة = (عدد الصفوف + عدد الأعمدة -١) .

وعلي الرغم من أنه يمكن الإستمرار في الحل سواءاً أخذنا الحل المبدئى بإستخدام طريقة الركن الشمالي الشرقي أو الحل المبدئى بإستخدام طريقة أقل التكاليف فإننا سوف نختار الحل المبدئى بإستخدام طريقة أقل التكاليف أولاً لأنه حلاً أساسياً ، فلا داعي لعمل معالجات خاصة ، وثانياً لأن طريقة أقل التكاليف عادة ما توصل أسرع إلي أقل الحل الأمثل .

الخطوة الثانية : مثالية الحل :

بإستخدام طريقة السير علي الحجر يكون اختبار الخلايا الفارغة علي النحو التالي :

الخلية ($م_{١}$ / $س_{٣}$) :

المسار هو $م_{١}س_{٣}$ ← $م_{١}س_{١}$ ← $م_{٣}س_{١}$ ← $م_{٣}س_{٣}$

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٣ - ٥ + ٣ - ٢ = -١

الخلية (م ٢ / س ١) :

المسار هو م٢س١ ← م٢س٢ ← م١س٢ ← م١س١

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ٧ - ٢ + ٤ - ٥ = ٤

الخلية (م ٢ / س ٣) :

المسار هو م٢س٣ ← م٢س٢ ← م١س٢ ← م١س١ ← م٣س١ ← م٣س٣

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ٥ - ٢ + ٤ - ٥ + ٣ - ٢ = ٣

الخلية (م ٣ / س ٢) :

المسار هو م٣س٢ ← م١س٢ ← م١س١ ← م٣س١

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ٤ ← - ٤ ← + ٥ ← - ٣ = ٢

وبمقارنة هذه القيم يتضح أن القيمة الوحيدة السالبة هي نتيجة التقييم للخلية (م ١ / س ٣) ولذلك يجب تعديل الحل الحالي .

الخطوة الثالثة : تعديل الحل الحالي :

يتم ملء الخلية (م ١ / س ٣) بأقصي قيمة ممكنة . ويتتبع

المسار الذي استخدم في تقييم هذه الخلية نجد أن القيمتين الموجودتين في الخلايا الركنية التي بها (-) هما ٢ ، ٢٢ ويعني ذلك أن أقصي قيمة يمكن وضعها في الخلية م ١ س ٣ هي القيمة ٢ . ويستلزم ذلك عمل التعديلات الرأسية والأفقية لنصل إلي الحل التالي :

من / إلي	س ١	س ٢	س ٣	الطاقة
م ١	[٥]	[٤] ٨	[٣] ٢	١٠
م ٢	[٧]	[٢] ٢٠	[٥]	٢٠
م ٣	[٣] ١٠	[٤]	[٢] ٢٠	٣٠
الطلب	١٠	٢٨	٢٢	٦٠

ونقوم بتكرار نفس خطوات التقييم علي النحو التالي :

الخلية (م ١ / س ١)

المسار م١س١ ← م٣س١ ← م٣س٣ ← م س١ س٣

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ٥ - ٣ + ٢ - ٣ = ١

الخلية (م ٢ / س ١)

المسار م٢س١ ← م٣س١ ← م٣س٣ ← م١ س٣ ← م١ س٢ ← م ٢ س٢

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ٧ - ٣ + ٢ - ٣ + ٤ - ٢ = ٥

الخلية (م$_{٢}$/ س$_{٣}$)

المسار م$_{٢}$س$_{٣}$ ← م$_{١}$س$_{٣}$ ← م$_{١}$س$_{٢}$ ← س$_{٢}$ س$_{٢}$

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٥ -٣ +٤ -٢ = ٤

الخلية (م$_{٣}$/ س$_{٢}$)

المسار م$_{٣}$س$_{٢}$ ← م$_{٣}$س$_{٣}$ ← م$_{١}$س$_{٣}$ ← س$_{١}$ س$_{٢}$

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٤ -٢ +٣ -٤ = ١

نتيجة : بمقارنة كل القيم الناتجة عن عملية التقييم للخلايا الفارغة يتضح أنها جميعاً قيماً موجبة ويعني ذلك أن الحل الحالي هو الحل الأمثل .

المثال الثاني :

أوجد الحل المبدني بإستخدام أسلوب الركن الشمالي الشرقي والحل الأمثل بإستخدام أسلوب السير علي الحجر لمشكلة النقل التالية.

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة
١	[٤]	[٧]	[٧]	[١]	١٠٠
٢	[١٢]	[٣]	[٨]	[٨]	٢٠٠
٣	[٨]	[١٠]	[١٦]	[٥]	١٥٠
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠

هل تعتقد أن إستخدام أسلوب أقل التكلفة في الوصول إلي الحل المبدئي سوف يؤدي إلي إختلاف الحل الأمثل لهذه المشكلة ؟ وضح ذلك رقمياً مع بيان الفارق الحقيقي بين طريقتي الركن الشمالي الشرقي وطريقة أقل التكلفة .

الحل المبدئي باستخدام طريقة الركن الشمالى الشرقي :

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة
١	[٤] ٨٠	[٧] ٢٠	[٧]	[١]	١٠٠
٢	[١٢]	[٣] ٧٠	[٨] ١٢٠	[٨] ١٠	٢٠٠
٣	[٨]	[١٠]	[١٦]	[٥] ١٥٠	١٥٠
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠

وهذا تعيبر حلاً مبدئياً ممكناً .

الحل الأمثل بإستخدام أسلوب السير على الحجر :

أولاً : تقييم الخلايا الفارغة :

الخلية (١ / حـ)

المسار (١ / حـ) ← (١ / ب) ← (٢ / ب) ← (١ / حـ)

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ٧   - ٧   + ٣   - ٨ = - ٥

الخلية (١ / د)

المسار (١ / د) ← (١ / ب) ← (٢ / ب) ← (٢ / د)

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ١   - ٧   + ٣   - ٨ = - ١١

الخلية (٢ / أ)

المسار (٢ / أ) ← (٢ / ٣) ← (١ / ب) ← (١ / أ)

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ١٢   - ٣   + ٧   - ٤ = ÷ ١٢

الخلية (٣ / أ)

المسار (٣/أ) ← (٣/د) ← (٢/د) ← (٢/ب) ← (١/ب) ← (١/أ)

+ ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١ ← + ١ ← - ١

+ ٨   - ٥   + ٨   - ٣   + ٧   - ٤ = ١١

الخلية (٣ / ب)

المسار (٣ / ب) ← (٣ / د) ← (٢ / د) ← (٢ / ب)

+ ١ ← -١ ← ١+ ← -١

+ ١٠ - ٥ + ٨ -٣ = ١٠

الخلية (٣ / حـ)

المسار (٣ / حـ) ← (٣ / د) ← (٢ / د) ← (٢ / حـ)

+ ١ ← -١ ← ١+ ← -١

+ ١٦ - ٥ + ٨ -٨ = ١١

بمقارنة القيم الناتجة عن عملية التقيم يتضح أن هناك بعض القيم السالبة ، ويعني ذلك أن الحل ليس هو الحل الأمثل .

ثانياً : تعديل الحل الحالي :

وتبدأ هذه الخطوة بتحديد المتغير الذي يجب أن يدخل الحل . ويعني ذلك تحديد الخلية الفارغة التي يجب أن تصبح مملوءة . وبمقارنة القيم السالبة نجد أن أكبر قيمة سالبة هي الخاصة بالخلية (١ / د) ولذلك يتم إختيار الخلية (١ / د) لتصحيح خلية مملوءة . ولذلك نرجع إلي المسار الذي إستخدم في تقييم هذه الخلية لتحديد أقصي قيمة يمكن أن توضع في هذه الخلية . بتأمل هذا المسار وهو .

(١ / د) ← (١ / ب) ← (٢ / ب) ← (٢ / د)

نجد أن القيمتين الموجودتين في الخلايا الركنية السالبة (١/ب) ،

(٢ / د) هما ٢٠ ، ١٠ علي التوالي . وعلى ذلك فإن أقصي قيمة يمكن وضعها في الخلية (١ / د) هي القيمة ١٠ حيث أنها أقل القيمتين . ويعمل هذا التعديل والتعديل الخاص بتوازن الصفوف والأعمدة نصل إلي الجدول التالي :

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة
١	[٤] ٨٠	[٧] ١٠	[٧]	[١] ١٠	١٠٠
٢	[١٢]	[٣] ٨٠	[٨] ١٢٠	[٨]	٢٠٠
٣	[٨]	[١٠]	[١٦]	[٥] ١٥٠	١٥٠
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠

تقييم الخلايا الفارغة :

الخلية (١ / حـ)

المسار (١/حـ) ← (١/ب) ← (٢/ب) ← (٢/حـ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٧   -٧   +٣   -٨ = -٥

الخلية (٢/أ)

المسار (٢/أ) ← (٣/٢) ← (١/ب) ← (١/أ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٢ -٣ +٧ -٤ = ١٢

الخلية (٢/د)

المسار (٢/د) ← (١/د) ← (١/ب) ← (٢/ب)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٨ -١ +٧ -٣ = ١١

الخلية (٣/ب)

المسار (٣/ب) ← (٣/د) ← (١/د) ← (١/ب)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٠ -٥ +١ -٧ = -١

الخلية (٣ / حـ)

المسار (٣/حـ)←(٣/د)←(١/د)←(١/ب)←(٢/ب)←(٢/حـ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٦ -٥ +١ -٧ +٣ -٨ =صفر

بمقارنة القيم الناتجة عن عملية التقييم يتضح أن هناك بعض القيم السالبة ، ويعني ذلك أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل .

ثالثاً : تعديل الحل الحالي :

بإختيار أقل القيم السالبة نجد أن الخلية التي يجب أن تصبح مملوءة هي الخلية (١ / حـ) . ولتحديد أقصي قيمة يمكن أن توضع في هذه الخلية نرجع إلي المسار الذي إستخدم في التقييم وهو :

(١/حـ) ← (١/ب) ← (٢/ب) ← (٢/حـ)

والذي نجد فيه أن القيمتين الموجودتين في الخلايا الركنية السالبة (١/ب) ، (٢/حـ) هما ١٠ ، ١٢٠ علي التوالي . ويعني ذلك أن أقصي قيمة يمكن أن توضع في هذه الخلية هي القيمة ١٠ . حيث أنها هي أقل القيم بين هاتين القيمتين . ويعمل هذا التعديل مع مراعاة توازن الصفوف والأعمدة تصل إلي الجدول التالي :

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة
١	٤ ، ٨٠	٧	٧ ، ١٠	١ ، ١٠	١٠٠
٢	١٢	٣ ، ٩٠	٨ ، ١١٠	٨	٢٠٠
٣	٨	١٠	١٦	٥ ، ١٥٠	١٥٠
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠

تقييم الخلايا الفارغة :

الخلية (١/ب)

المسار (١/ب) ← (٢/ب) ← (٢/حـ) ← (١/حـ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٧ -٣ +٨ -٧ = ٥

الخلية (٢ / أ)

المسار (٢/أ) ← (٢/حـ) ← (٢/ب) ← (١/أ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٢ -٨ +٧ -٤ = ٧

الخلية (٢/د)

المسار (٢/د) ← (١/د) ← (١/حـ) ← (٢/حـ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٨ -١ +٧ -٨ = ٦

الخلية (٣/أ)

المسار (٣/أ) ← (٣/د) ← (١/د) ← (١/أ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٨ -٥ +١ -٤ = صفر

الخلية (٣ / ب)

المسار(٣/ب)←(٣/د)←(١/د)←(١/حـ)←(٢/حـ)←(٢/ب)

+١ ← -١ ← +١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٠ -٥ +١ -٧ +٨ -٣ =٤

الخلية (٣ / حـ)

المسار (٣/حـ) ← (٣/د) ← (١/د) ← (١/حـ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٦ -٥ +١ -٧ =٥

النتيجـة :

بمقارنة القيم الناتجة من عملية التقييم يتضح أنها قيماً غير سالبة . ويعني ذلك أن الحل الحالي هو الحل الأمثل كما أن وفيما قيماً صفرية في التقييم يعني أن هناك أكثر من حل أمثل . وتكلفة هذا الحل هي .

٤ ×٨٠ +٧ ×١٠ +١ ×١٠ +٣ ×٩٠ +٨ ×١١٠ +٥ ×١٥٠

= ٣٢٠ + ٧٠ + ١٠ + ٢٧٠ + ٨٨٠ + ٧٥٠

= ٢٣٠٠ جنيه .

الحل المبدئي بإستخدام طريقة أقل التكاليف :

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة
١	٤	٧	٧	١ ١٠٠	١٠٠
٢	١٢	٣ ٩٠	٨ ١١٠	٨	٢٠٠
٣	٨ ٨٠	١٠	١٦ ١٠	٥ ٦٠	١٥٠
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠

تقييم الخلايا :

الخلية (١ / أ)

المسار (١/أ) ← (٣/أ) ← (٣/د) ← (١/د)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٤ -٨ +٥ -١ =صفر

الخلية (١ / ب)

المسار(١/ب)←(٢/ب)←(٢/حـ)←(٣/حـ)←(٣/د)←(١/د)

+١ ← -١ ← +١ ← -١ ← +١ ← -١

+٧ -٣ +٨ -١٦ +٥ -١ =صفر

الخلية (١ / حـ)

المسار (١/حـ) ← (٣/حـ) ← (٣/د) ← (١/د)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٧ -١٦ +٥ -١ =-٥

الخلية (٢ / أ)

المسار (٢/أ) ← (٣/أ) ← (٣/حـ) ← (٢/حـ)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٢ -٨ +١٦ -٨ =١٢

الخلية (٢ / د)

المسار (٢/د) ← (٢/حـ) ← (٣/حـ) ← (٣/د)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+٨ -٨ +١٦ -٥ =١١

الخلية (٣ / ب)

المسار (٣/ب) ← (٣/حـ) ← (٢/حـ) ← (٢/ب)

+١ ← -١ ← +١ ← -١

+١٠ -١٦ +٨ -٣ =-١

وبمقارنة هذه القيم يتضح أن الحل احالي ليس هو الحل الأمثل .

تعديل الحل الحالي :

الخلية (١/حـ) يجب أن تملأ بأقصي عدد ممكن من الوحدات ويكون الحل التالي كما يلي :

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة
١	[٤]	[٧]	[٧] ١٠	[١] ٩٠	١٠٠
٢	[١٢]	[٣] ٩٠	[٨] ١١٠	[٨]	٢٠٠
٣	[٨] ٨٠	[١٠]	[١٦]	[٥] ٧٠	١٥٠
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠

ويتقييم الخلايا الفارغة لهذا الحل نجد أن نتيجة التقييم قيماً غير سالبة لكل الخلايا . ويعني ذلك أن الحل الحالي هو الحل الأمثل .

ملحوظة هامة :

بمقارنة هذا الحل بالحل الأمثل الذي توصلنا إليه من قبل نجد أنها غير متطابقين . ولكن بحساب تكلفة الحل الحالي وهي :

٧٠× ٥ + ٨٠× ٨ + ١١٠× ٨+ ٩٠× ٣+ ٩٠× ١+ ١٠× ٧

٢٣٠٠ =

نجد أنها تعادل تماماً تكلفة الحل الأمثل السابق . وهذه بالضبط هي حالة وجود أكثر من حل أمثل .

كذلك فإنه من الواضح أن طريقة أقل التكاليف تؤدي إلي حلاً مبدئياً أقرب إلي الحل الأمثل عنه في حالة طريقة الركن الشمالي الشرقي .

إختبار مثالية الحل بإستخدام طريقة التوزيع المعدلMODI

إعتماداً علي الحل المبدئي الذي توصلنا إليه بإستخدام طريقة أقل التكاليف يمكننا إختبار مثالية الحل بإستخدام MODI كما يتضح في الجدول التالي :

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة	U
١	[٤]	[٧]	[٧]	[١] ١٠٠	١٠٠	صفر
٢	[١٢]	[٣] ٩٠	[٨] ١١٠	[٨]	٢٠٠	٤-
٣	[٨] ٨٠	[١٠]	[١٦] ١٠	[٥] ٦٠	١٥٠	٤
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠	
V	٤	٧	١٢	١		

وتكون المعاملات Iij للخلايا غير المملوءة علي النحو التال :

$$I_{(p \text{ ، } p)} = 4-(0+4) = 4-4 = 0$$

$$I_{(\text{١ ، ب})} = 7-(0+7) = 7-7 = 0$$

$$I_{(\text{١ ، حـ})} = 7-(0+12) = 7-12 = -5$$

$$I_{(\text{٢ ، أ})} = 12-(-4+4) = 12-0 = 12$$

$$I_{(\text{٢ ، د})} = 8-(-4+1) = 8-3 = 11$$

$$I_{(\text{٣ ، ب})} = 10-(4+7) = 10-11 = -1$$

ويلاحظ أن نتيجة التقييم هنا هي بالتمام نتيجة التقييم التي توصلنا إليها بإستخدام طريقة السير علي الحجر . وتوضح النتيجة أن الحل الحالي ليس هو الحل الأمثل لوجود قيماً سالبة وتكون الخطوة التالية هي ه تعديل الحل كما فعلنا من قبل إعادة تقييم الخلايا إلي أن نصل إلي الحل الأمثل .

المثال الثالث :

إستخدم أسلوب الركن الشمالي الشرقي في الوصول إلي الحل المبدئي فقط لمشكلة النقل التالية وضح خطوات الحل .

إلي / من	س	ص	ع	و	الطاقة
١	٣	٤	٥	٢	١٠
٢	٤	٥	٧	٦	١٤
٣	٥	٢	٤	٣	١٣
الطلب	٨	٧	٨	١٢	

الحل :

تكون الخطوة الأولي في مشكلة النقل هي التأكد من أن المشكلة متوازنة .

إجمالي الطلب = ٨ + ٧ + ٨ + ١٢ = ٣٥ وحدة .

إجمالي الطاقة = ١٠ + ١٤ + ١٣ = ٣٧ وحدة .

ويعني ذلك أن المشكلة غير متوازنة . ولذلك يجب عمل التعديل اللازم . وحيث أن إجمالي الطلب أقل من إجمالي الطاقة فيعني ذلك أننا سوف نحتاج إلي ما يسمي بالطلب الوهمي (عمود آخر جديد) . أما عدد الوحدات الموجود في آخر العمود فهو عبارة عن ٣٧ - ٣٥ = ٢ وحدة وذلك يضمن التوازن بين مجموع الصف الأخير والعمود الأخير في جدول النقل . أما تكلفة نقل الوحدة في

الخلايا الموجودة علي هذا العمود فهي دائماً صفر . وبذلك يكون لدينا الجدول التالي :

من / إلي	س	ص	ع	و	طلب وهمي	الطاقة
أ	٣	٤	٥	٢	صفر	١٠
ب	٤	٥	٧	٦	صفر	١٤
حـ	٥	٢	٤	٣	صفر	١٣
الطلب	٨	٧	٨	١٢	٢	٣٧

أما الخطوة التالية فهي تطبيق طريقة الركن الشمالي الشرقي في الوصول إلي الحل المبدئي . ويكون ذلك في ذلك الخطوات التالية:

١ - نبدأ من الخانة أ س في أقصي الركن الشمالي الشرقي ، ويتم مقارنة القيمة ٨ في أسفل العمود س مع القيمة ١٠ في آخر الصف أ ، ومنها يتضح أن أقصي قيمة يمكن أن توضع في الخلية أ س هي القيمة ٨ . وذلك يستلزم بعض التعديلات .

٢ - نظراً لأن وجود ٨ وحدات في الخلية أ س يترتب عليه الوفاء بكل الوحدات اللازمة في العمود س فيتم إستبعاد العمود س كلية من أية عمليات أخري . كذلك أيضاً يستلزم الأمر الأن تعديل القيمة ١٠ الموجودة في آخر الصف أ . فإستخدام ٨ وحدات من المصدر أ لإشباع المركز س يعني أن الوحدات المتبقية الآن هي وحدتين فقط في آخر الصف أ .

٣ - والآن لدينا نقط جزء من المصفوفة (بعد إستبعاد العمود س) يكون ركنه الشمالي الشرقي هو الخلية أ ص . وعند محاولة وضع أقصي قيمة ممكنة في هذه الخلية يتم مقارنة القيمة الموجودة أخر العمود ص (وهي ٧) مع القيمة الموجودة في آخر الصف أ (وهي ٢ فقط عند هذه المرحلة) ، ويتم وضع القيمة الأقل (٢) في الخلية أ ص وعمل التعديلات .

٤ - أن وضع ٢ في الخلية أ ص يستلزم الآن إستبعاد الصف أ نظراً لأن ذلك سوف يعني إستخدام كل الطاقة التي كانت متاحة في المصدر أ . كذلك فإن ذلك يستلزم تعديل القيمة الموجودة في آخر العمود ص لتصبح ٥ = (٧ - ٢) .

٥ - بإستبعاد الصف أ ، وقد إستبعدنا أصلاً العمود س في الخطوة الأول ، يكون لدينا الجزء المتبقي من الجدول والذي ركنه الشمالي الشرقي هو ب ص . ويتم مقارنة القيمة ١٤ مع القيمة ٥ ، ويتم وضع القيمة ٥ في الخلية ب ص وإستبعاد العمود ص وتعديل القيمة ١٤ لتصبح ٩ = ١٤ - ٥ .

- مع هذا التعديل يكون لدينا باقي جدول النقل والذي ركنه الشمالي الشرقي هو ب ع . عند مقارنة القيمة ٩ مع القيمة ٨ يتم وضع القيمة ٨ في الخلية ب ع . ويترتب علي ذلك إستبعاد العمود ع وتعديل القيمة ٩ في الصف ب لتصبح ١ . ويكون لدينا الجزء الباقي من المصفوفة والذي ركنه الشمالي الشرقي هو ب و . وبمقارنة القيمة

١ مع القيمة ١٢ توضع القيمة ١ في الخلية ب و ثم يتم إستبعاد الصف ب ، وتعديل القيمة ١٢ لتصبح ١١ .

٧ - يكون لدينا الآن الجزء الآخر من المصفوفة والذي خليته في الركن الشمالي الشرقي هي حـ و ، وبمقارنة القيمة ١٣ والقيمة ١١ يتم وضع القيمة ١١ في الخلية جـ و هو مع إستبعاد العمود وجـ و وتعديل القيمة ١٣ لتصبح ٢ والتي توضع تلقائياً في الخلية حـ/ طلب وهي . وبذلك نكون قد إنتهينا من عملية التوزيع لكل المواد .

وعلي ذلك يكون الحل المبدئي كما هو موضح في الجدول التالي :

من / إلي	س	ص	ع	و	طلب وهمي	الطاقة
أ	[٣] ٨	[٤] ٢	[٥]	[٢]	[صفر]	١٠
ب	[٤]	[٥] ٥	[٧] ٨	[٦] ١	[صفر]	١٤
حـ	[٥]	[٢]	[٤]	[٣] ١١	[صفر] ٢	١٣
الطلب	٨	٧	٨	١٢	٢	٣٧

ويعتبر هذا الحل حلاً مبدئياً ممكناً ، كذلك فإنه حلاً أساسياً لأن عدد الخلايا المملوءة

= ٧ = عدد الصفوف + عدد الأعمدة -١ = ٣ + ٥ -١ = ٧.

أسئلة للمراجعة

١ ـ اذكر الأساليب الممكن استخدامها في الوصول إلي كل من الحل المبدئى والحل الأمثل في مشكلة النقل ؟

٢ ـ اشرح معني أن تكون مشكلة النقل متوازنة ، ما هي التعديلات الواجبة لتحقيق ذلك إذا لم يكن متحققا ؟

٣ ـ لماذا يجب أن يكون عدد الخلايا المملوءة مساويا لـ (عدد الصفوف + عدد الأعمدة – ١) عند استخدام أسلوب النقل ؟

٤ ـ لماذا تعد طريقة الركن الشمالي الشرقي غير فعالة في تحديد الحل المبدئى ؟

٥ ـ ما هي حالة عدم الانتظام ؟

٦ ـ كيف يمكن معالجة حالة عدم الانتظام ؟

٧ ـ اشرح درجة التشابه بين أسلوب السير علي الحجر وطريقة السمبلكس في محاولة الوصول إلي الحل الأمثل ؟

٨ ـ ما هي المداخل المختلفة لتحديد الحل المبدئى ؟

٩ ـ ما هي البيانات اللازمة لاستخدام أسلوب النقل ؟

١٠ ـ هل من الممكن أن يحدث أن تكون هناك حاجة إلي إضافة صف وهمي وعمود لنفس المشكلة ؟ وضح إجابتك .

١٢ ـ إذا كان الحل الحالي ليس حلا أمثل :

(أ) كيف تختار الخلية التي يجب أن يتم تحويل وحدات إليها ؟

(ب) كيف تقرر عدد الوحدات التي يتم نقلها ؟

١٣ ـ ما معني الوحدات التي يتم تخصيصها في خلايا موجودة في الصف الوهمي أو العمود الوهمي في حل مشكلة النقل ؟

مسائل للتدريب

١ ـ فيما يلي بيانات تكلفة نقل الوحدة بالجنيه وبيانات الطاقة والطلب بأحد مشاكل النقل . اوجد الحل المبدئى والحل الأمثل لهذه المشكلة .

من / إلي	س١	س٢	س٣	الطاقة
م١	٥ جنيه	٤	٣	١٠
م٢	٧	٢	٥	٢٠
م٣	٣	٤	٢	٣٠
الطلب	١٠	٢٨	٢٢	٦٠

٢ ـ اوجد الحل المبدئي باستخدام أسلوب الركن الشمالي الشرقي والحل الأمثل باستخدام أسلوب السير علي الحجر لمشكلة النقل التالية.

هل تعتقد أن أسلوب أقل التكلفة في الوصول إلي الحل المبدئى سوف يؤدي إلي اختلاف الحل الأمثل لهذه المشكلة ؟ وضح ذلك رقميا مع بيان الفارق الحقيقي بين طريقتي الركن الشمالي الشرقي وطريقة أقل التكلفة ؟

من / إلي	أ	ب	جـ	د	الطاقة
١	٤	٧	٧	١	١٠٠
٢	١٢	٣	٨	٨	٢٠٠
٣	٨	١٠	١٦	٥	١٥٠
الطلب	٨٠	٩٠	١٢٠	١٦٠	٤٥٠

٣ ـ استخدم أسلوب الركن الشمالي الشرقي في الوصول إلي الحل المبدئى لمشكلة النقل التالية . وضح خطوات الحل تفصيلا .

من / الي	س	ص	ع	و	الطاقة
أ	٣	٤	٥	٢	١٠
ب	٤	٥	٧	٦	١٤
جـ	٥	٢	٤	٣	١٣
الطلب	٨	٧	٨	١٢	

٤ ـ تتولي أحد شركات المياة الغازية تشغيل ثلاثة مصانع لتعبئة المياة الغازية في المناطق ١ ، ٢ ، ٣ وذلك بطاقة انتاجية قدرها ٦٤٠ ، ٨٦٠ ، ٩٢٠ ألف جالون في الأسبوع علي التوالي . وتتولي توزيع هذا المنتج في خمسة مراكز أساسية علي مستوي الجمهورية هي أ ، ب ، جـ ، د، هـ . وكانت احتياجات هذه المراكز علي التوالي هي ٣٨٠ ، ٧٣٠ ، ٥٢٠ ، ٤٣٠ ، ٦٥٠ ألف جالون في الأسبوع . فإذا علمت أن مشكلة نقل الألف جالون من هذا المشروب هي كما في الجدول التالي بالجنيه .

من / إلي	أ	ب	جـ	د	هـ
١	١٢	١١	١٣	١٧	١٨
٢	٢٢	١٦	١٤	١٥	١٩
٣	١٤	٢٣	٢١	٢٥	١٢

فالمطلوب : هو تحديد أفضل خطة توزيع بشكل يضمن تقليل تكاليف النقل الإجمالية إلي أقل حد ممكن .

٥ ـ اوجد الحل الذي يضمن تقليل تكلفة النقل إلي أقل حد ممكن لمشكلة النقل التالية :

إلي / من	م١	م٢	م٣	الطاقة
أ	٨	٧	٤	٣٦
ب	٣	٥	٢	٤٢
حـ	٦	٤	٨	٥٨
الطلب	٤٥	٢٠	٧١	

الفصل الثالث

نظــرية القــرارات

Decision Theory

* حالات إتخاذ القرارات
* إتخاذ القرارات في ظل الخطر Risk
  - القيمة المتوقعة
  - القيمة المتوقعة للربح في ظل المعلومات الكاملة
  - القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة
  - شجرة إتخاذ القرارات
* إتخاذ القرارات في ظل عدم التأكد uncertainty

نظرية القرارات

Decision Theory

حالات إتخاذ القرارات :

تناولنا في بعض الأجزاء السابقة الكثير من حالات إتخاذ القرارات والتي تفترض التأكد certainty التام من البيانات التي تم معالجتها في كثير من المواقف . فعندما تناولنا موضوع البرمجة الخطية كان هناك تأكد تام من كافة البيانات الواردة في دالة الهدف وكذلك تلك البيانات الواردة في القيود . فربح الوحدة أو تكلفتها رقم محدد ومؤكد ومعروف . كذلك فإن إجمالي الطاقة المتاحة أو الطلب المتوقع الخاص بأحد السلع رقم محدد ومؤكد ومعروف . كما أن عدد الوحدات اللازمة من أحد المصادر لإنتاج وحدة واحدة من السلعة كان أيضاً محدداً ومؤكداً ومعروفاً . وسوف نجد أيضاً في أجزاء قادمة من هذا الكتاب بعض أساليب إتخاذ القرارات الأخري التي تفترض التأكد التام من البيانات التي يتم معالجتها .

وللأسف الشديد ، فإن الحياة ليست بهذه السهولة . فعندما نعتمد علي كثير من البيانات تكون هذه مجرد تقديرات لما سوف يحدث في المستقبل ، والذي في غلبية الحالات لا يكون مطابقاً بالتمام للقيم الذي تم توقعها . فنحن نقوم بالتقدير ولكن المستقبل الفعلي يكون دائماً « بيد الله » , « Act of God ». ورغما عن ذلك فإننا يجب أن نستمر في عملية التوقع والإستعداد لبعض الظروف الغير مؤكدة والتي قد نواجهها في المستقبل .

وإعتماداً علي ذلك يمكن القول بأن هناك عدة ظروف يتم في ظلها القيام بعملية إتخاذ القرارات ، وهي :

(١) حالة التأكد التام Certainty

(٢) حالة المخاطرة Risk

(٣) حالة عدم التأكد Uncertainty

(٤) حالة الصراع Conflict

وسوف نتناول في الأجزاء التالية الخصائص الأساسية لكل حالة .

أولاً : حالة التأكد التام Certainty

وهي الحالة التي تكون البيانات اللازمة لإتخاذ القرارات في ظلها معروفة ومؤكده ومحددة . وينبني علي ذلك أن البدائل الممكنة تكون معروفة والآثار المترتبة علي كل بديل يمكن حسابها وتكون أيضاً مؤكدة ومعروفة . وينبني ذلك علي فرض أساس في عملية إتخاذ القرارات وهو أن حالة مستقبلية واحدة one state of nature سوف تسود في المستقبل . ومن أهم الأساليب التي تستخدم في ظل تلك الظروف : البرمجة الخطية ، برمجة الأهداف ، البرمجة العددية ، أسلوب النقل ، أسلوب التخصيص ، أسلوب المسار الحرج . ويطلق عليها النماذج التقريرية المؤكدة في عملية إتخاذ القرارات deterministic models .

ثانياً : حالة الخطر Risk

ويقصد بذلك الحالة التي لا تكون فيها نتائج البدائل المطروحة مؤكدة بالكامل ولكن يمكن أن يكون لها إحتمال حدوث معروف . وينبني ذلك علي حقيقة أن البيانات (أو بعض البيانات) التي يتم التعامل فيها في ظل تلك الظروف تكون بيانات غير مؤكدة ولكن يمكن وضع إحتمال حدوث قيم مختلفة لها في ظل حالات مستقبلية متعددة MoreThan one State of nature. . فتقدير إستهلاك الخبز في مدينة الإسكندرية خلال الأسبوع القادم لا شك أنه سوف يأخذ شكلاً إحتمالياً . فعلي الرغم من عدم التأكد فإنه يمكن الإعتماد علي البيانات التاريخية السابقة في وضع توزيعاً إحتمال [illegible] نعالج موضوع التوزيعات الإحتمالية في الفصل الخاص بشبكات الأعمال الإحتمالية PERT في هذا الكتاب) يعبر عن تصوير تقريبي لتلك الظاهرة . ومثاله علي النحو التالي :

قيمة الإستهلاك (طن)	إحتمال لحدوث
١٠٠	٪٢٠
١٢٠	٪٣٥
١٤٠	٪٤٥
	٪١٠٠

ومن الملاحظ أن ذلك التوزيع الإحتمالي يقوم علي حصر كل

القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي (إستهلاك الخبز بالطن) وتقدير إحتمال حدوث كل قيمة . وعلي ذلك فإن مجموع تلك الإحتمالات يكون هو الواحد الصحيح .

وفي حالة وجود أكثر من متغير إحتمالي في عملية إتخاذ القرارات فإن العملية تكون أكثر تعقيداً ، ولذلك تستخدم مجموعة من النماذج الإحتمالية Probabilisric models والتي صممت خصيصاً إعتماداً علي نظرية الإحتمالات لتساعد في إتخاذ القرارات في ظل تلك الظروف . ومن أهم تلك النماذج : نظرية إتخاذ القرارات ، شجرة إتخاذ القرارات ، النماذج الإحتمالية في الرقابة علي المخزون ، نظرية صفوف الإنتظار (التي سوف تعالج فيما بعد في فصل مستقل) ، ونماذج المحاكاه Simulation .

ثالثاً : حالة عدم التأكد Uncertainty

وهذه هي الحالة الأكثر صعوبة والتي يكون فيها إحتمال حدوث الأشياء غير معروف علي الإطلاق . وبالتالي فإن تقدير إحتمال حدوث الأثار المترتبة علي كل بديل يكون صعباً إلي حد كبير . فهناك حالات مستقبلية متعددة ولا توجد بيانات كافية لتقدير إحتمالات حدوث كل منها . وقد يرجع ذلك إلي تعدد العوامل التي يمكن أن تؤثر علي متغير معين أو علي ظاهرة معينة . كما قد يرجع الأمر إلي التغير الدائم لتلك العوامل ومن ثم فإن الإعتماد علي البيانات التاريخية غير ذات معني . ويطلق علي تلك الخصائص في علم التنبؤ إصطلاحي درجة التعقيد Complexity ودرجة الإستقرار Stabillity . وعلي الرغم

من صعوبة حالة عدم التأكد هذه ، إلا أنه لا بد من مواجهتها في كثير من نواحي الحياة وفي عملية إتخاذ القرارات في دنيا الأعمال . وهناك بعض المداخل التي تستخدم وتهدف إلي تقليل درجة عدم التأكد إما عن طريق محاولة الحصول علي مزيد من المعلومات أو إدخال عنصر التقييم الشخصي Subjective كتقدير للإحتمالات عند مواجهة تلك الحالات (سوف نتعرض لبعض تلك الأساليب فيما بعد) .

رابعاً : حالة الصراع Conflict

وهذه هي الحالة التي تتعارض فيها مصالح طرفين أو أكثر عند عملية إتخاذ القرارات . فالقرارات التي يتخذها أحد الأطراف تتوقف علي نوع القرار الذي إتخذه الطرف الآخر . ومن الشائع أن تظهر تلك الحالات في دنيا الأعمال عندما تواجه المنشأة ببعض القرارات التنافسية من قبل المنافسين أو عندما تتعامل هي في سوق تنافس وتكون هي الشركة البادئة بالقرار . وقد تم تقديم نظرية المباريات Game Theory لمعالجة عملية إتخاذ القرارات في ظل تلك الظروف .

وسوف نتناول بشئ من التفصيل في الأجزاء التالية علية إتخاذ القرارات في كل من حالتي الخطر Risk وعدم التأكد Uncertainty (*).

(*) إعتبر البعض أن حالات إتخاذ القرارات هما حالتي التأكد Certainty وعدم التأكد Uncertainty إما حالة عدم التأكد فتتضمن حالتين فرعيتين هما الحالة الإحتمالية Probabi- lisric وأخري غيرالإحتمالية nonprobabilistic (Anderson , p. 71) .

إتخاذ القرارات في ظل الخطر

Decision Making Under Risk

أوضحنا من قبل أن نظرية القرارات Decision Theory والتي تعتمد علي نظرية الإحتمالات Probabilities تساعد متخذ القرار في تحليل المشاكل المعقدة ذات البدائل الإحتمالية المتعددة والتي يكون لها اثاراً غير مؤكدة . وعلي ذلك فإن الهدف الأساسي لنظرية القرارات هي أن تزود متخذى القرارات بمعلومات، محددة ودقيقة عن إحتمال حدوث آثار معينة لبعض القرارات . وتكون تلك المعلومات هي المرشد للوصول إلي أفضل البدائل المطروحة .

وتستلزم عملية إتخاذ القرارات في ظل الخطر التحديد الدقيق لثلاثة عناصر ومكونات رئيسية هي :

(١) البدائل الممكنة والمطروحة في عملية إتخاذ القرار : وهي عبارة عن بدائل التصرف التي يمكن أن يسلكها متخذ القرار . وعلي الرغم من أنه نظرياً يمكن القول بأنه يجب تحديد كل البدائل المكنه إلا أنه في الواقع العملي يعتمد متخذي القرارات علي حكمهم الشخصي في إستبعاد بعض البدائل منذ البداية بناءاً علي معيار يكون محدد مقدماً وعليه شبه إتفاق . فعند حصر البدائل المكنة عند تصميم نوع الموتور للسيارة يستبعد منذ البداية البدائل المتقادمة أو التي ما زالت في طور البحوث والدراسة . فكما يستبعد من البدائل الموتور الذي يعتمد علي الفحم ، يعتمد أيضاً البديل الخاص بالإعتماد علي الطاقة الشمسية . ويتم حصر البدائل في مجموعة ممكنة ومطروحة من قبل كافة الشركات.

وتجدر الإشارة هنا إلي أن وجود بدائل متعددة هو جوهر عملية إتخاذ القرارات . فإذا لم يكن هناك سوي تصرف واحد ممكن في أحد المواقف فإن ذلك يعني عدم وجرد خيار إتخاذ القرار .

(٢) الحالات المستقبلية التي يمكن أن تحدث وإحتمالا حدوثها : وهي عبارة عن الظروف المستقبلية التي يمكن أن تحدث ويكون لها تأثير علي نتائج القرار state of nature . فإذا كان الأمر المطروح هو إختيار حجماً معيناً لمصنع يتم إنشاؤه (بدائل) ، فلا شك أن الحالة التي سوف يكون عليها مقدار الطلب علي السلعة التي يقدمها هذا المصنع سوف تؤثر بشكل كبير علي نتائج القرار الذي تم إتخاذه فيما يتعلق بطاقة المصنع . فطاقة المصنع الكبيرة سوف تلائم تماماً الطلب الكبير علي السلعة . والعكس صحيح ، فالطاقة المحدودة قد تكون أفضل البدائل إذا كان الطلب المستقبلي محدود .

وتجدد الإشارة هنا إلي أن تلك الحالات المستقبلية قد تتعلق بظروف عالمية ، أو ظروف محلية . كما أنها قد تكون حالة إقتصادية أو حالة سياسية أو حالة إجتماعية أو ظروف مناخية .

وفي ظل ظروف الخطر Risk فإنه يمكن عمل تقدير لإحتمال حدوث كل حالة من تلك الحالات المستقبلية ، (وقد أوضحنا ذلك من قبل عند الحديث عن تقدير رقم الطلب علي الخبز في مدينة الإسكندرية). ويهنا أن نوضح هنا أن ذلك المثال السابق إفترض أن القيم التي يمكن أن يأخذها المتغير العشوائي (إستهلاك الخبز) هي قيم منفصلة Discrete ، أي أنه ليس بينها أية قيم أخري يمكن أن

يأخذها المتغير العشوائي . وقد كان ذلك بغرض التبسيط فقط . فكثير من المتغيرات العشوائية يمكن أن تأخذ قيماً متصلة Contin uous (مثل عنصر الوقت) تحتاج إلي توزيعات إحتمالية من نوع خاص. ولذلك سوف نعالج هاتين الحالتين في جزئين مستقلين فيما بعـــد .

(٣) العائد Payoff المحسوب لبديل معين في ظل حالة مستقبلية محددة: وهو عبارة عن الأثر الناتج عن إختيار أحد البدائل عندما تسود حالة مستقبلية معينة . ولذلك فإن هذا الأثر يعد مشروطاً بإتخاذ هذا البديل وتوفر حالة مستقبلية معينة ، ولذلك يطلق عليه العائد المشروط Conditional Payoff .

وحتي يمكن إيضاح العلاقة بين تلك المكونات بشكل محدد ، دعنا نأخذ الجدول التالي :

جدول العائد المتوقع

البـــدائـل	الحالات المستقبلية التي يحتمل أن تسود			
	حـــالة ١	حـــالة ٢	حـــالة ٣	حـــالة ٤
البديل الأول	ع$_{١١}$	ع$_{٢١}$	ع$_{٣١}$	ع$_{٤١}$
البديل الثاني	ع$_{١٢}$	ع$_{٢٢}$	ع$_{٣٢}$	ع$_{٤٢}$
البديل الثالث	ع$_{١٣}$	ع$_{٢٣}$	ع$_{٣٣}$	ع$_{٤٣}$

وذلك علي أساس أن إحتمال حدوث الحالات المستقبلية هو $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، $ح_٤$.

دعنا الآن نأخذ مثالاً رقمياً حتي يمكننا تصور معني تلك المكونات .

مثال : هامبورجر الساحل الشمالي :

تفكر شركة هامبورجر الساحل الشمالي في إنشاء أحد الفروع لها في القرية الصيفية لاساتذه جامعة القاهرة . وقد كان أمام الشركة ثلاثة بدائل فيما يتعلق بحجم الفرع الذي سوف يتم إنشاؤه . (يقصد هنا بالحجم المساحة التي يتم حجزها وطاقة التسهيلات الإنتاجية وعدد الأفراد العاملين بالفرع) . فالفرع إما أن يكون صغيراً أو متوسطاً أو كبيراً . ونظراً لاعتماد هذا القرار علي نسبة الإشغال وعدد الأفراد في القرية ، فقد قامت الشركة بدراسة للسوق توصلت منها إلي تقديراً للتوزيع الإحتمالي للطلب (بالألف جنيه) خلال السنة الأولي علي النحو التالي :

الحالات المستقبلية للطلب	مستوي الطلب (بالألف جنيه)	إحتمال الحدوث = ح
حالة ١	٢٥,٠٠٠	,١٥
حالة ٢	٥٠,٠٠٠	,٢٥
حالة ٣	٧٥,٠٠٠	,٣٥
حالة ٤	١٠٠,٠٠٠	,٢٥
		١,٠٠

وإعتماداً علي بيانات التكلفة والإيرادات في ظل كل بديل وحالـة مستقبليـة أمـكن للشـركة التوصـل إلي جدول العائد Payoff (بالألف جنيه) التالي :

البدائل	الحالات المستقبلية للطلب			
	حالة ١	حالة ٢	حالة ٣	حالة ٤
	,١٥	,٢٥	,٣٥	,٢٥
مشروع كبير	- ١٠	- ٧	- ٣	١٢
مشروع متوسط	- ٢	٨	١١	١١
مشروع صغير	٥	٥	٥	٥

ويلاحظ علي هذا الجدول ما يلي :

(١) تكون أفضل الحالات هي حالة الطلب المرتفع والمشروع الكبير بينما تكون أسوء الحالات (أقصي خسائر) عندما يتم إنشاء مشروع كبير في ظل عدم وجود طلب كافي .

(٢) عندما يكون الطلب منخفض (حالة ١) وحجم المشروع صغير فإن ذلك يضمن تحقيق أرباح ولكن لا يمكن زيادة تلك الأرباح حتي مع زيادة رقم الطلب . فالأمر يزيد علي طاقة الفرع .

(٣) إذا تم إنشاء مشروع متوسط فإن ذلك يحقق خسائر في ظل الطلب المنخفض ولكنه يحقق أرباحاً إبتداءاً من حالة الطلب رقم ٣ وما بعدها .

(٤) من المؤكد أن القيم المحسوبة في الجدول تتوقف علي كل من التكاليف والإيرادات الخاصة بهذا النوع من النشاط والتي لم نتطرق إليها . فذلك مجرد مثال لإيضاح الفكرة الأساسية . وسوف نورد فيما يلي مثالاً آخر لإيضاح كيفية الوصول إلي ذلك العائد المشروط Conditional Payoff .

مثال : سوبر ماركت الساحل الشمالي .

يعمل سوبر ماركت الساحل الشمالي في قرية الدبلوماسيين في منطقة تبعد عن الإسكندرية بحوالي ٤٥ كم . وقد أخذ علي عاتقه توفير الخبز اللازم لإستهلاك القرية بشكل يومي وطازج . وقد إعتاد علي شراء عبوة الخبز من أحد المخابز الراقية بثلاثة جنيهات ويبيعها بسعر ثمانية جنيهات . وفي مقابل هذا السعر المرتفع فإنه يتبرع بكل الخبز المتبقي في نهاية اليوم للعاملين بالقرية وللأسر الفقيرة المحيطة بالمنطقة . بمعني آخر فإن القيمة الإقتصادية للخبز المتبقي بعد البيع تساوي صفر no salvage value (بالطبع قيمة تلك الصدقة كبيرة عند الله) . وقد بدأ السوبر ماركت في جمع معلومات عن حجم الطلب المتوقع في اليوم ، وفي سبيل ذلك إعتمد علي البيانات الخاصة بالطلب علي الخبز خلال ٥٠ يوماً مضت . وقد توصل إلي النتائج التالية :

كمية المبيعات (عبوة خبز)	عدد الأيام (التكرار)	إحتمال الحدوث
٢٠	١٠	,٢٠
٢١	٢٠	,٤٠
٢٢	١٥	,٣٠
٢٣	٥	,١٠
	٥٠ يوم	١,٠٠

ويمكن الإعتماد علي هذا الجدول بشكل مباشر في حساب إحتمال حدوث كل قيمة من كمية المبيمات كما في العمود الأخير من الجدول ، ويكون ذلك بقسمة التكرار علي إجمالي عدد المشاهدات لكل قيمة .

أما جدول القيم المشروطة Conditional Payoff (بالجنيه) فيكون علي النحو التالي :

البدائل \ حالات الطلب	٢٠ عبوة	٢١ عبوة	٢٢ عبوة	٢٣ عبوة
	,٢٠	,٤٠	,٣٠	,١٠
٢٠ عبوة	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
٢١ عبوة	٩٧	١٠٥	١٠٥	١٠٥
٢٢ عبوة	٩٤	١٠٢	١١٠	١١٠
٢٣ عبوة	٩١	٩٩	١٠٧	١١٥

ويوضح الجدول أن البدائل المطروحة أمام صاحب السوبر ماركت هي أربعة بدائل تظهر في شكل صفوف تمثل كل منها بديل للكمية التي يمكن شراؤها يومياً وعرضها للبيع . أما الأعمدة فهي عبارة عن الحالات المستقبلية للطلب والتي يحتمل حدوثها في اليوم الواحد .

أما الطريقة التي يتم بها حساب القيم الخاصة بالعائد المشروط في كل حالة ، وعلي أساس أن قيمة الوحدات الغير مباعة صفر ، فتكون كما يلي :

* في حالة شراء ٢٠ عبوة وبيع ٢٠ عبوة يكون الربح المشوط

= ٢٠ (٨ - ٣) = ١٠٠ جنيه .

* في حالة شراء ٢٠ عبوة وبيع أي قيمة أعلي من ٢٠ يظل الربح كما هو ١٠٠ جنيه نظراً لعدم القدرة علي الوفاء بذلك الطلب الأعلي من القيمة التي تم شراؤها .

* في حالة شراء ٢١ عبوة وبيع ٢٠ عبوة يكون الربح المشروط

=٢٠ (٨) - ٢١ (٣) = ١٦٠ -٦٣ = ٩٧ جنيه .

* في حالة شراء ٢١ عبوة وبيع ٢١ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢١ (٨ - ٣) = ١٠٥ جنيه .

* في حالة شراء ٢١ عبوة وبيع أي قيمة أعلي من ٢١ يظل الربح كما هو ١٠٥ جنيه نظراً لعدم القدرة علي الوفاء بذلك الطلب الأعلي من القيمة التي تم شراؤها .

* في حالة شراء ٢٢ عبوة وبيع ٢٠ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٠ (٨) - ٢٢ (٣) = ١٦٠ - ٦٦ =٩٤ جنيه .

* في حالة شراء ٢٢ عبوة وبيع ٢١ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢١ (٨) - ٢٢ (٣) = ١٦٨ - ٦٦ = ١٠٢ جنيه .

* في حالة شراء ٢٢ عبوة وبيع ٢٢ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٢ (٨ -٣) = ١١٠ جنيه .

* في حالة شراء ٢٢ عبوة وبيع ٢٣ يظل الربح المشروط عند ١١٠ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة وبيع ٢٠ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٠ (٨) - ٢٣ (٣) = ١٦٠ - ٦٩ = ٩١ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة وبيع ٢١ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢١ (٨) - ٢٣ (٣) = ١٦٨ - ٦٩ = ٩٩ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة وبيع ٢٢ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٢ (٨) - ٢٣ (٣) = ١٧٦ - ٦٩ = ١٠٧ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة وبيع ٢٣ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٣ (٨ - ٣) = ١١٥ جنيه .

والآن بعد أن إنتهينا من المكونات الأساسية ، يبقي السؤال الرئيسي : كيف يمكن إتخاذ القرار في ظل حالة الخطر ؟

الإجابة تكمن في الإعتماد علي معيار معين للمفاضلة بين البدائل المطروحة . ومن أهم المعايير المستخدمة : القيمة المتوقعة - Expected Value (والتي يطلق عليها Bayes Criteria نسبة إلي عالم الرياضة الإنجليزي في القرن الثامن عشر Thomas Bayes) ، معيار الرشد Criterion of rationality (والتي يطلق عليها Principle of in- sufficient reason) ، ومعيار أقصي إحتمال حدوث Criterion of maximun likehood . وسوف نتناول بالشرح التفصيلي كيفية إستخدام معيار القيمة المتوقعة نظراً لأنه أكثر المعايير إستخداماً .

القيمة المتوقعة Expected Value

تمثل القيمة المتوقعة للتوزيع الإحصائي المتوسط الحسابي لهذا التوزيع ، ويمكن الوصول إلي قيمتها في حالة التوزيعات الإحصائية المنفصلة discrete عن طريق ضرب كل قيمة للمتغير العشوائي في إحتمال حدوثها ثم إضافة تلك القيم الناتجة عن عملية الضرب لتمثل القيمة المتوقعة . أي أن

$$EV(X) = \Sigma X . P(X)$$

وعندما يستخدم مفهوم القيمة المتوقعة في إتخاذ القرارات في ظل الخطر فإن المعيار يكون هو إختيار البديل الذي يعظم القيمة المتوقعة للعائد (أو يقلل القيمة المتوقعة للخسارة) .

وحتي يمكن تطبيق تلك الفكرة علي مثال « سوبر ماركت الساحل الشمالي » فإننا نبدأ بحساب القيمة المتوقعة للعائد Expected Payoff لكل بديل علي النحو التالي :

* القيمة المتوقعة للبديل الأول (شراء ٢٠ عبوة)

= ١٠٠(٢٠,) +١٠٠ (٤٠,) +١٠٠ (٣٠,) +١٠٠ (١٠,)

= ١٠٠ جنيه .

* القيمة المتوقعة للبديل الثاني (شراء ٢١ عبوة) .

= ٩٧ (٢٠,) +١٠٥ (٤٠,) +١٠٥ (٣٠,) + ١٠٥ (١٠,)

= ١٠٣,٤ جنيه .

* القيمة المتوقعة للبديل الثالث (شراء ٢٢ عبوة) .

= ٩٤(٢٠,) + ١٠٢(٤٠,) + ١١٠ (٣٠,) + ١١٠ (١٠,)

= ١٠٣,٦ جنيه .

* القيمة المتوقعة للبديل الرابع (شراء ٢٣ وحدة)

= ٩١ (٢٠,) + ٩٩ (٤٠,) + ١٠٧ (٣٠,) + ١١٥ (١٠,)

= ١٠١,٤ جنيه .

ويتضح من ذلك أن أفضل سياسة من الممكن أن يعتمد عليها « سوبر ماركت الساحل الشمالي » هي شراء ٢٢ عبوة خبز يومياً . فسوف يعني ذلك أن متوسط الربح اليومي المحقق من بيع الخبز سوف يصل إلي ١٠٣,٦ جنيه . تذكر أن ذلك هو مجرد المتوسط فليس من الضروري أن يكون الرقم المحقق في أحد الأيام هو بالتمام ١٠٣,٦ جنيه ، ولكن في المتوسط تكون هذه هي أفضل السياسات في الأجل الطويل . ولذلك فإن أسلوب تعظيم العائد المتوقع لا يناسب إلا في حالات إتخاذ القرارات في مواقف متكررة repetitive decisions .

والآن كيف يمكن إستخدام معيار « تقليل القيمة المتوقعة للخسارة » إلي أقل حد ممكن؟

يمكننا الإعتماد علي نفس المثال السابق لتقدير قيم الخسارة المشروطة Conditional loss من ذات البيانات التي أوردناها من قبل والخاصة بقيم العائد المشروط . ويكون ذلك عن طريق إختيار أكبر القيم في كل عمود وطرح باقي القيم في ذات العمود منها وتكون القيم الناتجة هي مقدار تكلفة الفرصة الضائعة نتيجة لعدم إتباع السياسة المثلي في حالة أن يكون الطلب في حالة معينة وبالتالي فإن جدول الخسارة المشروطة Conditional loss لمشكلة « سوبر ماركت الساحل الشمالي » يكون علي النحو التالي :

حالات الطلب / البدائل	٢ عبوة	٢١ عبوة	٢٢ عبوة	٢٣ عبوة
	٢	٤	,٣٠	١٠
٢ عبوة	صفر	٥	١٠	١٥
٢١ عبوة	٣	صفر	٥	١
٢٢ عبوة	٦	٣	صفر	٥
٢٣ عبوة	٩	٦	٣	صفر

وبنفس الطريقة يمكن حساب القيم المتوقعة للخسارة في ظل كل بديل علي النحو التالي .

* القيمة المتوقعة للخسارة المشروطة للبديل الأول (٢ عبوة)

= صفر (٢) - ٥ ١ ٤) - ١ (٣) + ١٥ ١ ١ ،

= ٥ ٦ حبيه

* القيمة المتوقعة للخسارة المشروطة للبديل الثاني (٢١ عبوة)

= ٣ (٢٠,) + صفر (٤٠,) + ٥ (٣٠,) + ١٠ (١٠,)

= ٣,١ جنيه .

* القيمة المتوقعة للخسارة المشروطة للبديل الثالث (٢٢ عبوة)

= ٦ (٢٠,) + ٣ (٤٠,) + صفر (٣٠,) + ٥ (١٠,)

= ٢,٩ جنيه .

* القيمة المتوقعة للخسارة المشروطة للبديل الرابع (٢٣ عبوة)

= ٩ (٢٠,) + ٦ (٤٠,) + ٣ (٣٠,) + صفر (١٠,)

= ٥,١ جنيه .

ويتضح من ذك أن أفضل البدائل والتي تقلل القيمة المتوقعة لخسارة إلي أقل حد ممكن هو البديل الثالث والذي يقضي بشراء ٢٢ عبوة يومياً . وتجدر الإشارة هنا إلي أن الإعتماد علي أي من المدخلين (تعظيم العائد المتوقع أو تدنية الخسارة المتوقعة) سوف يؤدي وبشكل دائم إلي نفس القرار ، أي سوف يؤدي إلي إختيار نفس البديل .

القيمة المتوقعة للربح في ظل المعلومات الكاملة Perfect information

دعنا نفترض أن صاحب « سوبر ماركت الساحل الشمالي » إستطاع أن يلغي حالة الخطر التي يعمل في ظلها ووصل إلي تأكد تام

من رقم الطلب اليومي علي الخبز . هل تعتقد أن ذلك من الممكن أن يجعله في موقف أفضل في عملية إتخاذ القرار وبالتالي يستطيع تحقيق ربح أكبر ؟ إن الإجابة البديهية علي ذلك هي نعم ، ولكن يبقي السؤال : كيف ؟ وإلي أي حد ؟ . لاحظ أولاً أن حالة التأكد هذه لا تعني أن الطلب اليومي سوف يكون رقم ثابت ، بل ستظل القيم التي يتم طلبها ذات توزيعاً إحتمالياً ، فالأمر لا يتعدي أكثر من تأكد صاحب المحل من رقم الطلب الذي سوف يحدث في اليوم ، أيا كان هذا الرقم .

ولنعود الآن إلي حالة وجود معلومات تامة Perfect information ، وبالرجوع إلي جدول العائد المشروط « لسوبر ماركت الساحل الشمالي » نجد أن أفضل التصرفات التي سوف يتولاها متخذ القرار إذا تأكد من رقم الطلب اليومي هو أن يقوم بطلب نفس القيمة فقط ، لا أكثر ولا أقل . فيوضح الجدول السابق أن هذه هي السياسة التي تعطي أفضل عائد مشروط . والتي يمكن أن نلخصها في جدول جديد كما يلي :

إذا كان الطلب	أطلـــب	العائد المشروط	إحتمال الحدوث
٢٠	٢٠	١٠٠	,٢٠
٢١	٢١	١٠٥	,٤٠
١٢	٢٢	١١٠	,٣٠
٢٣	٢٣	١١٥	,١٠

ويمكن من هذا الجدول أن نقوم بحساب القيمة المتوقعة للربح في ظل البيانات الكاملة ، علي أنها تساوي

=١٠٠ (٫٢٠) +١٠٥ (٫٤٠) +١١٠ (٫٣٠) +١١٥ (٫١٠)

= ١٠٦٫٥ جنيه .

القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة :

أوضحت المعالجة السابقة أن القيمة المتوقعة للربح في ظل المعلومات الكاملة تفوق القيمة المتوقعة للربح المشروط في ظل الخطر. فقد وصلت إلي ١٠٦٫٥ جنيه في اليوم بعد أن كانت ١٠٣٫٦جنيه في اليوم في ظل أفضل البدائل . ويعني ذلك أن قيمة تلك البيانات الإضافية التي تؤكد لصاحب السوبر ماركت أرقام الطلب الفعلية ، والتي يطلق عليها القيمة المتوقعة للمعلومات الكاملة Expected Value of Pefect Information (EVPI) .

= ١٠٦٫٥ – ١٠٣٫٥ = ٢٫٩ جنيه / يوم

وتمثل تك القيمة ، من الناحية النظرية ، أقصي مبلغ إضافي يمكن أن يدفعه متخذ القرار لتحسين تقدير الإحتمالات الخاصة بتقدير الطلب اليومي علي السلعة . ففي حالتنا هذه تكون الشركة مستعدة لأن تدفع ٢٫٩ جنيه كحداً أقصي للقيام بحوث تسويق تحسين تقديرات الطلب اليوم .

جدول العائد المشروط في حالة وجود قيمة للوحدات الغير مباعة :

إفترضنا في المثال السابق الخاص « بسوبر ماركت الساحل الشمالي » أن كل الوحدات المتبقية من الخبز ليست لها قيمة إقتصادية (قيمته صفر) ، ولكن في الحياة العملية غالباً ما يتم التخلص من الخبز المتبقي إما بأسعار أقل أو في شكل مرتد للمنتج الرئيسي . وعادة ما يكون ذلك بقيمة أقل من سعر البيع الأصلي ويطلق علي تلك القيمة Salvage Value . فإذا إفترضنا في نفس المثال أن العبوة الغير مباعة في نفس اليوم يتم التخلص منها أو بيعها لمربي الطيور بثمن قدره ٢ جنيه فإن جدول العائد المشروط يكون علي النحو التالي :

حالات الطلب / البدائل	٢٠ عبوة	٢١ عبوة	٢٢ عبوة	٢٣ عبوة
	٫٢٠	٫٤٠	٫٣٠	٫١٠
٢٠ عبوة	١٠٠	١٠٠	١٠٠	١٠٠
٢١ عبوة	٩٩	١٠٥	١٠٥	١٠٥
٢٢ عبوة	٩٨	١٠٤	١١٠	١١٠
٢٣ عبوة	٩٧	١٠٣	١٠٩	١١٥

وذلك علي أساس أن :

* في حالة شراء ٢١ عبوة وبيع ٢٠ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٠ (٨) - ٢١ (٣) + ١ (٢) = ٩٩ جنيه .

* في حالة شراء ٢٢ عبوة وبيع ٢٠ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٠ (٨) - ٢٢ (٣) + ٢ (٢) = ٩٨ جنيه .

* في حالة شراء ٢٢ عبوة وبيع ٢١ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢١ (٨) - ٢٢ (٣) + ١ (٢) = ١٠٤ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة وبيع ٢٠ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٠ (٨) - ٢٣ (٣) + ٣ (٢) = ٩٧ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة وبيع ٢١ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢١ (٨) - ٢٣ (٣) + ٢ (٢) = ١٠٣ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة وبيع ٢٢ عبوة يكون الربح المشروط

= ٢٢ (٨) - ٢٣ (٣) + ١ (٢) = ١٠٩ جنيه .

وبنفس الطريقة تكون القيمة المتوقعة للعائد لكل بديل هي :

* القيمة المتوقعة لربح البديل الأول (شراء ٢٠ عبوة)

=١٠٠ (,٢٠) +١٠٠ (,٤٠) +١٠٠ (,٣٠) +١٠٠ (,١٠)

= ١٠٠ جنيه .

* القيمة المتوقعة لربح البديل الثاني (شراء ٢١ عبوة) .

= ٩٩ (,٢٠) ± ١٠٥ (،٤٠) +١٠٥ (,٣٠) +١٠٥ (,١٠)

= ١٠٣,٨ جنيه .

* القيمة المتوقعة لربح البديل الثاني (شراء ٢٢ عبوة)

= ٩٨ (٢٠,) + ١٠٤ (٤٠,) +١١٠ (٣٠,) +١١٠ (١٠,)

= ١٠٥,٢ جنيه .

* القيمة المتوقعة للربح البديل الثالث (شراء ٢٣ عبوة)

= ٩٧ (٢٠,) +١٠٣ (٤٠,) +١٠٩ (٣٠,) + ١١٥ (١٠,)

= ١٠٤,٨ جنيه .

ويعني ذلك أن أفضل البدائل هو البديل الثاني والذي يقضي بشراء ٢٢ عبوة يومياً فذلك يحقق في المتوسط ربحاً يومياً قدره ١٠٥,٢ جنيه .

ملحوظـــة :

في حالة وجود أكثر من قيمة للوحدات المتبقاه كأن يكون هناك سعر يتم تخفيضه يومياً reduced price ، فإنه يفضل الإعتماد علي نماذج التحليل الحدي Marginal Analysis والذي يعالج تفصيلاً ضمن نماذج الرقابة علي المخزون .

إدخال أثر الخسارة الناتجة عن عدم وجود وحدات كافية :

تناولنا حتي الآن في مشكلة « سوبر ماركت الساحل الشمالي» الحالة التي يتم فيها بيع الوحدات الزائدة بسعر أقل من تكلفة شراؤها (ثمن الشراء ٣ جنيه ، سعر بيع الوحدة الزائدة ٢ جنيه) ، والسؤال الآن هو كيف يمكن أن نأخذ في الحسبان النوع الآخر من الخسارة التي

يتحملها المشروع بسبب عدم وجود وحدات كافية لمواجهة الطلب . وتتمثل هذه الخسارة في تكلفة ضياع فرصة تحقيق أرباح . وفي هذه الحالة يمكن أن نأخذ بمدخل إنشاء جدول كامل للخسارة المشروطة Con-ditional loss يتضمن كلا من خسارة وجود وحدات زائدة orerstocking وخسارة وجود وحدات أقل من الطلب understocking . ويكن الجدول كما يلي :

حالات الطلب / البدائل	٢٠ عبوة	٢١ عبوة	٢٢ عبرة	٢٣ عبوة
	,٢٠	,٤٠	,٣٠	,١٠
٢٠ عبوة	صفر	٥	١٠	١٥
٢١ عبوة	١	صفر	٥	١٠
٢٢ عبوة	٢	١	صفر	٥
٢٣ عبوة	٣	٢	١	صفر

وذلك علي أساس أن :

* في حالة شراء نفس الكميات المباعة تكون إجمالي الخسائر صفر .

* في حالة شراء ٢٠ وحدة والطلب ٢١ وحدة تكون خسارة الفرصة الضائعة

= (٢٠ - ٢١) ٥ = ٥ جنيه .

* في حالة شراء ٢٠ وحدة والطلب ٢٢ وحدة تكون خسارة الفرصة الضائعة

= (٢٢ - ٢٠)٥ = ١٠ جنيه .

* في حالة شراء ٢٠ وحدة والطلب ٢٣ وحدة تكون خسارة الفرصة الضائعة

= (٢٣ - ٢٠)٥ = ١٥ وحدة .

* في حالة شراء ٢١ وحدة والطلب ٢٠ وحدة تكون الخسارة الناتجة عن الوحدات الإضافية .

= (٢١ - ٢٠) (٣ - ٢) = ١ جنيه .

علي أساس أن تكلفة الشراء هي ٣ جنيه وسعر بيع الوحدة بسعرمخفض هو ٢ جنيه .

* في حالة شراء ٢١ وحدة والطلب ٢٢ وحدة تكون خسارة الفرصة الضائعة .

= (٢٢ -٢١) (٥) = ٥ جنيه .

* في حالة شراء ٢١ وحدة والطلب ٢٣ وحدة تكون خسارة الفرصة الضائعة

= (٢٣ - ٢١) (٥) = ١٠ جنيه .

* في حالة شراء٢٢ وحدة والطلب ٢٠ وحدة تكون الخسارة الناتجة عن الوحدات الإضافية .

= (٢٢ - ٢٠) (١) = ٢ جنيه .

* في حالة شراء ٢٢ وحدة والطلب ٢١ وحدة تكون الخسارة الناتجة عن الوحدات الإضافية .

= (٢٢ - ٢١) (١) = ١ جنيه .

* في حالة شراء ٢٢ وحدة والطلب ٢٣ وحدة تكون خسارة الفرصة الضائعة .

= (٢٣ - ٢٢) (٥) = ٥

* في حالة شراء ٢٣ عبوة والطلب ٢٠ عبوة تكون تكلفة الخسارة الناتجة عن الوحدات الإضافية .

= (٢٣ -٢٠) (٣ - ٢) = ٣ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة والطلب ٢١ عبوة تكون تكلفة الخسارة الناتجة عن الوحدات الإضافية .

= (٢٣ - ٢١) (١) = ٢ جنيه .

* في حالة شراء ٢٣ عبوة والطلب ٢٢ عبوة تكون تكلفة الخسرة الناتجة عن الوحدات الإضافية .

= (٢٣ - ٢٢) (١) = ١ جنيه .

وعلي ذلك يمكن حساب القيمة المتوقعة لخسارة المشروطة علي النحو التالي :

* القيمة المتوقعة لخسارة البديل الأول (شراء ٢٠ وحدة)

= صفر (٢٠,) + ٥ (٤٠,) +١٠ (٣٠,) +١٥(١٠,)

= ٦,٥ جنيه .

* القيمة المتوقعة لخسارة البديل الثاني (شراء ٢١ وحدة) .

= ١ (٢٠,) + صفر (٤٠,) + ٥ (٣٠,) + ١٠ (١٠,)

= ٢,٧ جنيه .

* القيمة المتوقعة لخسارة البديل الثالث (شراء ٢٢ وحدة) .

= ٢ (٢٠,) + ١ (٤٠,) + صفر (٣٠,) + ٥ (١٠,)

= ١,٣ جنيه .

* القيمة المتوقعة لخسارة البديل الرابع (شراء ٢٣ وحدة) .

= ٣ (٢٠,) + ٢ (٤٠,) + ١ (٣٠,) + صفر (١٠,)

= ١,٧ جنيه .

ويتضح من ذلك التحليل أن البديل الثالث هو أفضل البدائل والذي يقضي بشراء ٢٢ وحدة في اليوم .

شجرة القرارات Decision Tree

هي عبارة عن طريقة محددة لعرض وتصوير البدائل المتاحة أمام متخذي القرارات في مواقف معينة والآثار المترتبة علي كل بديل . وعلي الرغم من أنه يمكن استخدام شجرة القرارات في حالة وجود جدول للعائد المشروط لقرار في موقف واحد إلا أنه يمكن استخدامها أيضاً لمعالجة حالة القرارات ذات المواقف المتتالية sequential decisions.فقد يري المدير في مرحلة معينة انشاء مصنع صغير ولكن بعد تغير الحالة التي عليها الطلب قد يكون المدير في موقف

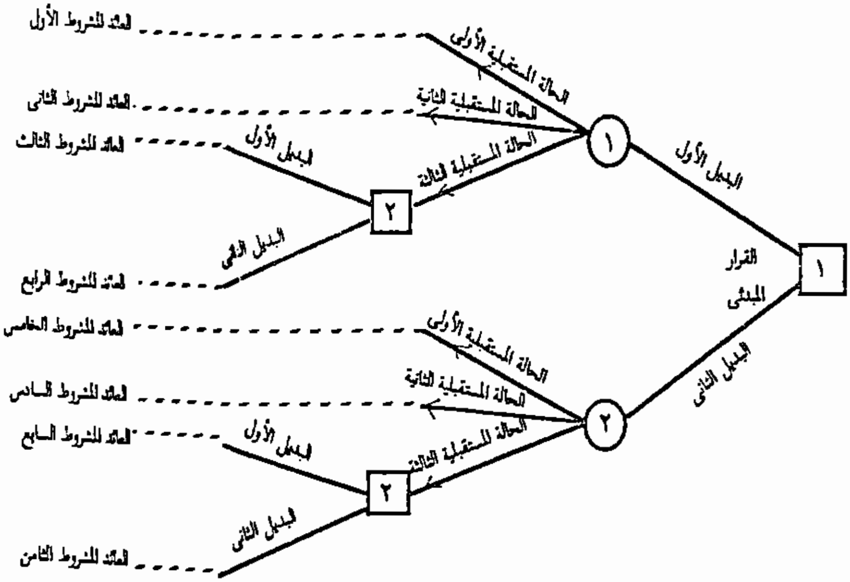
المفاضلة بين اضافة وحدة جديدة صغيرة أو إجراء توسع في طاقة المصنع الحالي .

وتتكون شجرة اتخاذ القرارات من بعض الرموز الأسـاسية المتعارف عليها في رسم الشجرة وهي :

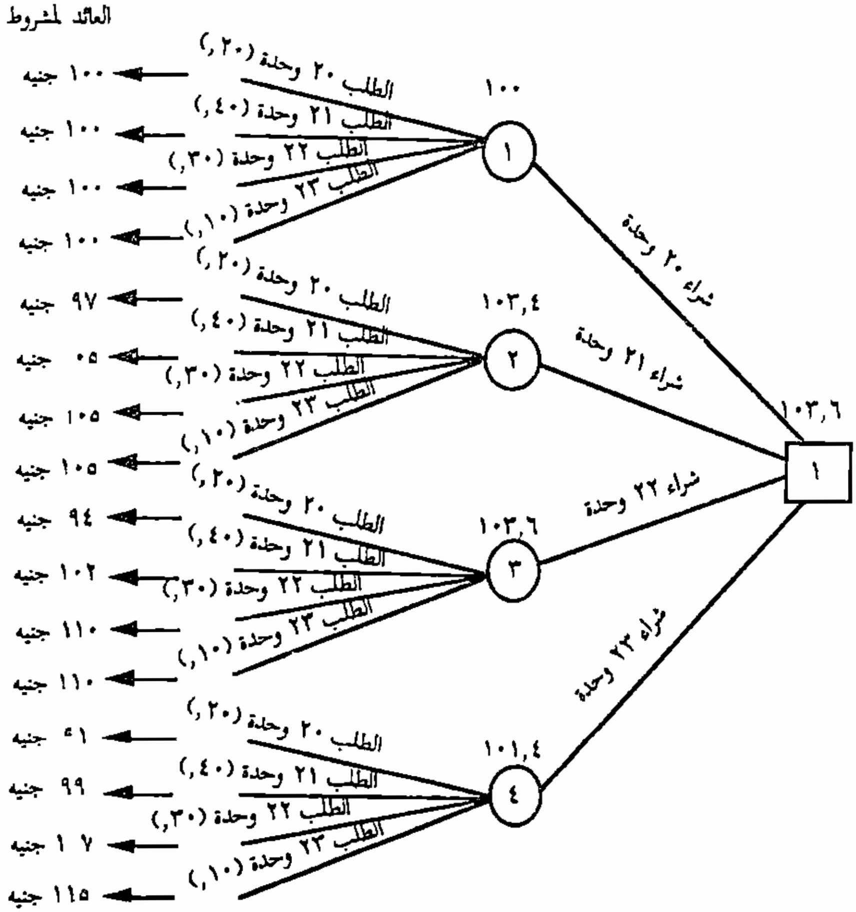
□ المربع الصغير والذي يستخدم للتعبير عن نقطة يبدأ منها فروع branches يمثل كل منها بديل متاح أمام متخذ القرار . وذلك فإن هذا المربع الصغير يعبر عن نقطة لإتخاذ القرار decision point .

○ الدائرة الصغيرة والتي تستخدم أيضاً للتعبير عن نقطة يبدأ منها فروع branches ولكن كل منها يمثل حالة مستقبلية state of nature سوف يواجهها متخذ القرار . ولذلك فإن تلك الدائرة الصغيرة تسمي الحدث الممكن Chance event.

ويمكن تصور قراءة الشبكة من اليسار لليمين علي النحو التالي :



ولنعود الآن الي مثال « سوبر ماركت الساحل الشمالي »، والذى يمثل اتخاذ قرار في موقف واحد وليس في مواقف متتابعة، حيث يمكننا تصوير نفس البيانات الموجودة في جدول العائد المشروط في الشكل التقليدي لشجرة القرارات . علي النحو التالي :



واعتماداً على فكرة القيمة المتوقعة للعائد يمكن الوصول إلي أفضل القرارات عن طريق الوصول للقيمة المتوقعة للعائد لكل قرار واختيار البديل الذي يعظم قيمة العائد . وطريقة المعالجة بإستخدام شجرة اتخاذ القرارات تعتمد على أن نبدأ من أطراف الشجرة . وفي حالتنا هذه نبدأ من اليسار في اتجاه اليمين ، Folding the tree back،

وعند كل دائرة صغيرة ○ نتوقف لنحدد القيمة المتوقعة للعائد بناءً على الاحتمالات الخاصة للحالات المستقبلية التي تخرج من هذه الدائرة الصغيرة ○ وبإستخدام العائد المشروط أمام كل حالة مستقبلية . تكون القيمة المتوقعة المسحوبة هى تلك الخاصة بالبديل الذي يصل بين المربع الذي يمثل نقطة بداية البدائل وينتهى عند تلك الدائرة الصغيرة ○ التي تم حساب القيمة المتوقعة عندها .

ففي المثال الحالى نبدأ من الدائرة الصغيرة رقم (١) وهى تعبر عن البديل الأول فى ظل حالات الطلب المستقبلية المختلفة . ولذلك فإن القيمة المتوقعة لهذا البديل

= ٢٠,(١٠٠) + ٤٠,(١٠٠) + ٣٠,(١٠٠) + ١٠,(١٠٠)
= ١٠٠ جنيه

وبنفس الطريقة فإن القيمة المتوقعة المسحوبة عند الدائرة الصغيرة (٢) = ١٠٣,٤ جنيه

كما أنها تساوى ١٠٣,٦ جنيه عند الدائرة (٣) و ١٠١,٤ جنيه عند الدائرة (٤) . (وهى ذات القيم التى تم التوصل اليها بإستخدام الجدول من قبل) . ومن الشائع فى هذه الحالة أن يتم كتابة تلك القيم على الفروع التى تمثل كل بديل على الرسم ذاته وايكن بلون مخالف .

وبعد الانتهاء من تلك الخطوة الخاصة بحساب القيمة المتوقعة عند كل دائرة صغيرة ○ تكون الخطوة التالية هى الانتقال الى

المربعات الصغيرة التى تعبر عن نقط لاتخاذ القرارات decision point حيث نكون فى موقف يسمح بالمفاضلة بين البدائل المختلفة . وفى المثال الحالى ليس لدينا إلا نقطة اتخاذ قرارات وحيدة هى $\boxed{1}$ وعندها يمكننا المفاضلة بين العوائد المتوقعة الخاصة بالبدائل الأربعة . ويكون من السهل عندئذ اتخاذ القرار الملائم . وفى المثال الحالى ، عند المربع $\boxed{1}$ يمكننا القول أن البديل الثالث (شراء ٢٢ عبوة) هو أفضل البدائل حيث أنه يحقق أعلى عائد متوقع ممكن قيمته ١٠٣,٦ جنيه فى اليوم .

مثـــــال :

فيما يلى جدول العائد المشروط السنوى المسحوب لاحدى الشركات التى تواجه مشكلة اختيار الحجم الملائم للمصنع الجديد الذى سوف تقوم بإنشائه فى ظل ثلاثة حالات مستقبلية لمستوى الطلب على انتاج هذا المصنع .

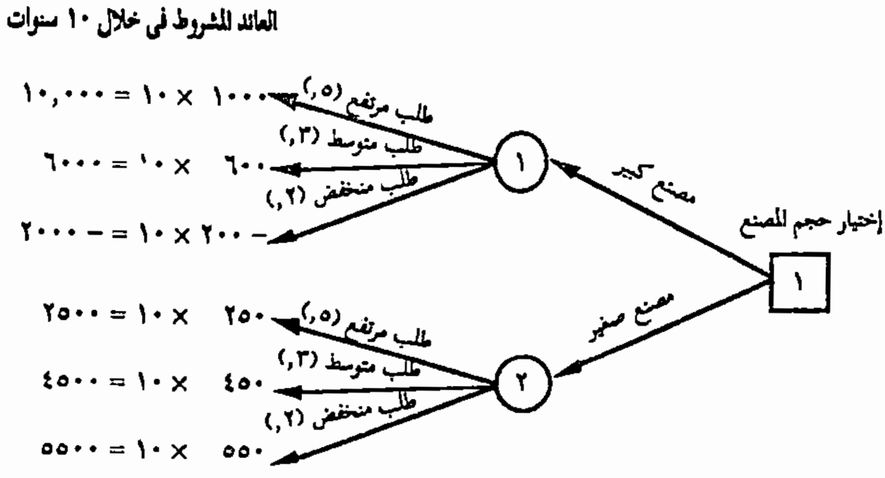
حالة الطلب / البدائل	الطلب مرتفع	الطلب متوسط	الطلب منخفض
	,٥٠	,٣٠	,٢٠
إنشاء مصنع كبير	١٠٠٠	٦٠٠	٢٠٠ -
إنشاد مصنع صغير	٢٥٠	٤٥٠	٥٥٠

فإذا كانت تكلفة انشاء المصنع الكبير تبلغ ٢٨٠٠ جنيه بينما يتكلف انشاء المصنع الصغير ١٤٠٠ جنيه فقط ، وكانت سياسة

الشركة هى استرداد تلك القيمة خلال عشرة سنوات على أقساط متساوية . كما أنه من المفترض أن يكون جدول العائد المشروط ثابت خلال العشر سنوات .

المطلوب : استخدام اسلوب شجرة القرارات فى اختيار الحجم الملائم للمصنع .

تكون الخطوة الأولى هى تصوير عملية اتخاذ القرارات فى هذه الحالة فى شكل شجرة كما يلى



ومنها يكون

عند (١) العائد المتوقع خلال العشر سنوات

= ١٠,٠٠٠ (,٥) + ٦٠٠٠ (,٣) - ٢٠٠٠ (,٢)

= ٦٤٠٠

عند (٢) العائد المتوقع خلال العشر سنوات

= ٢٥٠٠ (٫٥) + ٤٥٠٠ (٫٣) + ٥٥٠٠ (٫٢)

= ٣٧٠٠

وعلى ذلك فإن عند المربع $\boxed{١}$

الأثر النهائى للقرار الأول (بناء مصنع كبير)

= ٦٤٠٠ - ٢٨٠٠ = ٣٦٠٠ جنيه

الأثر النهائى للقرار الثانى (بناء مصنع صغير)

= ٣٧٠٠ - ١٤٠٠ = ٢٣٠٠ جنيه

ولذلك فإن القرار الذى يعظم صافى الربح المتوقع خلال السنوات العشر هو بناء المصنع الكبير .

ولنناقش الآن الحالة الاكثر شيوعاً عند استخدام شجرة القرارات وهى حالة المواقف المتتابعة Sequential Decisions فى إتخاذ القرارات . وفى ظل ذلك الحالة يقوم متخذ القرار باختيار بديل معين فى ظل موقف معين وبعد أن يتم وضع هذا البديل موضع التنفيذ ممكن أن تظهر فرصة جديدة تقتضى اختيار بديل آخر . ولذلك مع مرور الوقت يقوم متخذ القرار بإتخاذ سلسلة من القرارات المتتابعة .

مثـــــال :

تفكر شركة « ماريكا » لإنتاج الكراسى البلاستيك فى شراء ماكينة تتولى تصنيع أحد أنواع الكراسى الذى اثبتت الدراسة أن عليه

طلب كبير للاستخدام فى الشاليهات وفى مناطق المصيف . وقد وجدت الشركة أن الطلب على الكرسى خلال السنة الأولى سوف يكون له تأثير مباشر على الطلب خلال السنة الثانية . ولذلك توصلت الى تقديرات للتوزيع الاحتمالى للطلب خلال السنة الأولى على أساس ثلاثة مستويات للطلب باحتمال الحدوث التالى :

طلب منخفض	,٤٠
طلب متوسط	,٥٠
طلب مرتفع	,١٠

أما تقديرات الطلب خلال السنة الثانية فكان متوقفاً - كما أشرنا - على الطلب خلال السنة الأولى فى شكل الاحتمالات المشروطة Conditional Probabilites على النحو التالى :

احتمال (الطلب بكون منخفض خلال العام الثانى / الطلب منخفض خلال العام الأول)= ,٧

احتمال (الطلب بكون مرتفع خلال العام الثانى / الطلب منخفض خلال العام الأول) = ,٣

احتمال (الطلب بكون منخفض خلال العام الثانى / الطلب متوسط خلال العام الأول) = ,٦

احتمال (الطلب بكون مرتفع خلال العام الثانى / الطلب متوسط خلال العام الأول) = ,٤

احتمال (الطلب بكون منخفض خلال العام الثانى / الطلب مرتفع خلال العام الأول) = ,٢

احتمال (الطلب بكون مرتفع خلال العام الثانى / الطلب مرتفع خلال العام الأول) = ,٨

(لاحظ أن كل حالات الطلب الممكنة خلال العام الثانى هى إما مرتفع أو منخفض فقط ولذلك فإن مجموع الاحتمالات لتلك الحالتين لكل حالة للطلب خلال السنة الأولى يعادل الواحد الصحيح) .

أما عن البدائل المتاحة الأن أمام الشركة فهى إما شراء آلة محدودة الطاقة تتكلف ٢٠٠,٠٠٠ جنيه أو أخرى كبيرة تتكلف ٥٧٥,٠٠٠ جنيه . كما أن البدائل التى يمكن أن تقوم بها الشركة خلال العام الثانى تبعا للقرار الذى اتخذته فى أول السنة الأولى وحسب حالة الطلب الجديدة خلال السنة الثانية فكانت على النحو التالى :

(١) إذا قررت الشركة الآن شراء الآلة الأولى ذات الطاقة المحددة وظهر فعلاً أن الطلب منخفض خلال السنة الأولى فإن الشركة سوف تستمر فى استخدام نفس الآلة خلال السنة الثانية .

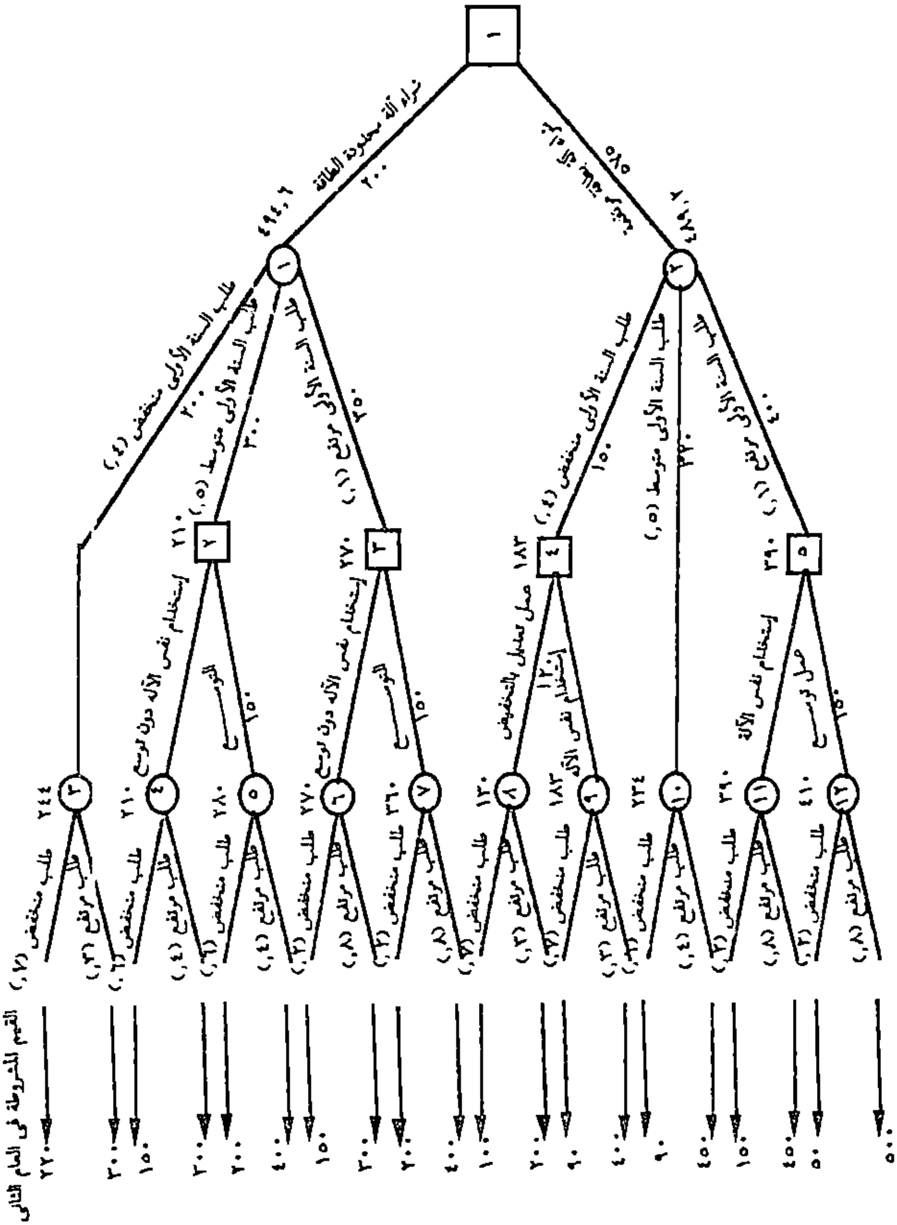
(٢) إذا قررت الشركة الآن شراء الآلة الأولى ذات الطاقة المحددة وظهر فعلا أن الطلب خلال السنة الأولى متوسط أو مرتفع فإن الشركة سوف تفكر فى أحد بديلين ، إما أن تستمر فى استخدام نفس الألة أو شراء وحدة جديدة تتكلف ١٥٠,٠٠٠ جنيه .

(٣) إذا قررت الشركة الآن شراء الآلة الثانية ذات الطاقة الكبيرة وظهر فعلاً أن الطلب منخفض خلال السنة الأولى فإن الشركة سوف تفكر فى ادخال بعض التعديلات على الآلة والتى من شأنها أن تقلل من طاقتها المتاحة حتى يمكن توفير تكاليف التشغيل والصيانة إلى أقل حد ممكن ، وسوف يتكلف هذا التعديل حوالى ١٢٠,٠٠٠ جنيه .

(٤) إذا قررت الشركة الآن شراء الآلة الثانية ذات الطاقة الكبيرة واتضح فعلاً أن الطلب متوسط خلال السنة الأولى فإن الشركة سوف تستمر فى استخدام نفس الآلة خلال السنة الثانية .

(٥) إذا قررت الشركة الآن شراء الآلة الثانية ذات الطاقة الكبيرة واتضح فعلاً أن الطلب مرتفع خلال السنة الأولى فإن الشركة سوف تفكر فى أحد بديلين هما : أما أن تستمر فى استخدام نفس الآلة دون تعديل أو القيام بتعديل طفيف من شأنه أن يرفع من طاقة الآلة ، وسوف يتكلف ذلك ٦٠,٠٠٠ جنيه .

وتكون الخطوة الأولى هى تصوير تلك الحالة فى شكل شجرة اتخاذ القرارات على النحو التالى ، والتى يلاحظ عليها ما يلى :


شراء آلة محدودة الطاقة
٢٠٠
٤٩٤,٦
٤٨٩,٠
٥٨٥
طلب السنة الأولى منخفض (٠,٤)
طلب السنة الأولى متوسط (٠,٥)
طلب السنة الأولى مرتفع (٠,١)
استخدام نفس الآلة دون توسع
التوسع
عمل تعادل بالتخفيض
استخدام نفس الآلة
عمل توسع
طلب منخفض
طلب مرتفع
القيم المشروطة فى العام الثانى

(١) يمثل المربع الأول [١] فى أقصى اليمين بداية الشجرة وهو يعبر عن نقطة اتخاذ القرار الأولى فى بداية السنة الأولى بالمفاضلة بين كل من الآلة محدودة الطاقة والالة ذات الطاقة المرتفعة بتكلفة قدرها ٢٠٠,٠٠٠ جنيه للأولى و ٥٧٤,٠٠٠ للثانية .

(٢) تمثل كل من المربعات [٢] ، [٣] ، [٥] نقاط اتخاذ قرارات فى بداية السنة الثانية للمفاضلة بين إما الإستمرار بنفس طاقة المصنع الذى تم استخدامه خلال السنة الأولى أو التوسع عن طريق إضافة آلة جديدة تتكلف ١٥٠,٠٠٠ جنيه .

(٣) يمثل المربع [٤] نقطة اتخاذ قرار للمفاضلة بين عمل تعديل من شأنه أن يخفض طاقة تشغيل الآلة الحالية (يتكلف ١٢٠,٠٠٠ جنيه) أو الاستمرار فى تشغيل نفس الآلة .

(٤) تمثل الدوائر (١) و (٢) نقاط الحالات المستقبلية للطلب خلال السنة الأولى وهى أما منخفض أو متوسط أو مرتفع .

(٥) تمثل الدوائر من (٣) الى (١٢) نقاط الحالات المستقبلية للطلب خلال السنة الثانية وهى اما منخفض أو مرتفع فقط .

(٦) يوجد على الآغصان الخاصة بالحالات المستقبلية خلال السنة الأولى والسنة الثانية قيم العائد المشروط المفترضة بالألف جنيه.

ومثال ذلك توجد أسفل الغصن (١)—(٣) القيمة ٢٠٠ والتى تعبر عن قيمة العائد المشروط فى نهاية السنة الأولى إذا قررت الشركة شراء آلة محددة الطاقة فى بداية الفترة الأولى ثم اتضح بعد ذلك أن الطلب خلال تلك الفترة منخفض . كذلك فإن القيمة ٢٣٠ والموجود أسفل الغصن (٢)—(١٠) تعبر عن العائد المشروط فى حالة شراء الة بطاقة مرتفعة وأن يكون الطلب الفعلى خلال السنة الأولى متوسطاً .

كذلك فإن القيم الموجودة والخاصة بالأغصان التى تبدأ من الدوائر من (٣) إلى (١٢) تعبر عن القيمة المشروطة للعائد الذى يمكنه تحقيقه خلال العام الثانى فى ظل عدة شروط متتابعة . فعلى سبيل المثال تمثل القيمة ٢٢٠ الواردة أمام الدائرة (٣) فى حالة الطلب المنخفض : مقدار العائد المشروط خلال العام الثانى فى حالة تحقق كل الشروط التالى :

(أ) قامت الشركة لشراء الآلة محدودة الطاقة فى بداية السنة الأولى .

(ب) اتضح أن الطلب الفعلى خلال السنة الأولى منخفض .

(جـ) اتضح أن الطلب الفعلى خلال السنة الثانية منخفض .

ومثال آخر ، تمثل القيمة ٤٠٠ الواردة أمام الدائرة (٧) فى حالة الطلب المرتفع : مقدار العائد المشروط خلال العام الثانى فى حالة تحقق كل الشروط التالية :

(أ) قامت الشركة لشراء آلة محددة الطاقة فى بداية السنة الأولى .

(ب) أصبح فعلاً الطلب مرتفعاً خلال السنة الأولى .

(جـ) قررت الشركة إجراء توسع على طاقة الحالة الآلية .

(د) أصبح فعلاً الطلب مرتفعاً خلال السنة الثانية .

والسؤال الآن هو كيف يمكن التوصل إلى أفضل القرارات ؟ بمعنى آخر هل يفضل فى ظل كل التوقعات أن تبدأ الشركة بالآلة المحدودة أم الآلة الكبيرة ؟

تكون الإجابة على ذلك بإستخدام نفس قاعدة Bayes التى تقوم على حساب القيمة المتوقعة للعائد ثم معالجة ذلك بالتكلفة المتوقعة وتحديد القيمة المتوقعة للعائد الصافى (الربح) فى كل حالة. وتبدأ خطوات الحل بعكس اتجاه نمو الشجرة أى من الأطراف وهى هنا الدوائر (٣) إلى (١٢) حيث نقوم بحساب القيمة المتوقعة للعائد المشروط عند كل دائرة بإستخدام كل من قيمة العائد المشروط واحتمال الحدوث . فعلى سبيل المثال :

القيمية المتوقعة للعائد المشروط عند (٣) = ٢٢٠ (٠,٧) + ٣٠٠ (٠,٢)

= ٢٤٤ الف جنيه

القيمية المتوقعة للعائد المشروط عند (٤) = ١٥٠ (٠,٦) + ٣٠٠ (٠,٤)

= ٢١٠ الف جنيه

وهكذا ، تم حساب باقى القيم الموجودة أعلى تلك الدوائر بنفس الطريقة .

يمكننا الآن أن نتحرك فى إتجاه اليمين لنقوم باتخاذ القرارات عند نقط اتخاذ القرارات $\boxed{٢}$ ، $\boxed{٣}$ ، $\boxed{٤}$ ، $\boxed{٥}$.

بالنسبة للنقطة $\boxed{٢}$ يمكننا الآن حساب القيمة المتوقعة لصافى العائد بالنسبة للبديلين على النحو التالى :

* إذا قررت الشركة استخدام نفس الآلة دون توسع فإنه ليس هناك تكلفة إضافية ولذلك يكون صافى الربح المتوقع هو ١٢٠ الف جنيه .

* إذا قررت الشركة التوسع فإنه التكلفة الإضافية تعادل ١٥٠ الف جنيه ولذلك فإن صافى الربح المتوقع فى هذه الحالة =٢٨٠ - ١٥٠ = ٧٠ الف جنيه فقط .

ومن الواضح أن القرار عند النقطة $\boxed{٢}$ هو عدم التوسع وأن أفضل ربحاً يممكن تحقيقه عند $\boxed{٢}$ هو ٢١٠ الف جنيه كما يظهر أعلى تلك النقطة .

بالنسبة للنقطة $\boxed{٣}$:

* فى حالة عدم التوسع : صافى الربح = ٢٧٠ الف جنيه

* فى حالــة التوســع : صافى الربح = ٣٦٠ - ١٥٠

= ٢١٠ الف جنيه

ويعنى ذلك أن أفضل القرارات عند ٣ هو عدم التوسع بربحاً قدره ٢٧٠ الف جنيه . بالنسبة للنقطة ٤ :

* فى حالة تعديل بتخفيض طاقة الآلة :

ص فى الربح = ١٣٠ - ١٢٠ = ١٠ الف جنيه

* فى حالة عدم اجراء تعديل : صافى الربح = ١٨٣ الف جنيه.

ويعنى ذلك أنه من الأفضل عدم إجراء التعديل بربحاً قدره ١٨٣ الف جنيه بالنسبة للنقطة ٥ :

* فى حالة استخدام نفس الآلة : الربح الصافى = ٣٩٠ الف جنيه .

* حالة عمل توسع : الربح الصافى = ٤١٠ - ١٥٠

= ٢٦٠ الف جنيه .

ويعنى ذلك أنه من الأفضل عدم إجراء التوسع وتحقيق ربحاً قدره ٣٩٠ الف جنيه .

تستطيع الآن أن نتحرك أكثر فى اتجاه اليمين لحساب القيم المتوقعة للعائد المشروط عند الدوائر ١ ، ٢ كما يلى :

عند ١ يكون اجمالى القيمة المتوقعة

= القيمة المتوقعة للعائد المشروط خلال العامين الناتجة عن حالة الطلب المنخفض فى السنة الأولى + القيمة المتوقعة للعائد المشروط خلال العامين الناتجة عن حالة الطلب المتوسط فى السنة الأولى +

القيمة المتوقعة للعائد المشروط خلال العامين الناتجة عن حالة الطلب المرتفع فى السنة الأولى وهى :

= (٢٠٠ + ٢٤٤) (,٤)

+ (٣٠٠ + ٢١٠) (,٥)

+ (٣٥٠ + ٢٧٠) (,١)

= ٤٩٤,٦ الف جنيه

أما عند الدائرة ② فإن اجمالى القيمة المتوقعة

= (١٨٣+ ١٥٠) (,٤)

+ (٣٢٠ + ٢٣٤) (,٥)

+ (٤٠٠ + ٣٩٠) (,١)

= ٤٨٩,٢ الف جنيه

ليس أمامنا الآن إلا الإنتقال يميناً إلى نقطة القرار الأصلية ١ وعندها يمكننا المفاضلة بين البدائل المطروحة بناءاً على صافى لقيمة المتوقعة الاجمالية لكل بديل على النحو التالى :

البديل الأول (شراء آلة محدودة الطاقة) :

صافى القيمة المتوقعة الاجمالية

= ٤٩٤,٦ - ٢٠٠ = ٢٩٤,٦ الف حنيه

البديل الثانى (شراء آلة بطاقة مرتفعة) :

صافى القيمة المتوقعة الاجمالية =

٤٨٩,٢ - ٥٧٥ = -٨٥,٨ الف جنيه

أى أن اختيار البديل الثانى سوف يترتب عليه خسارة متوقعة قدرها ٨٥,٨ الف جنيه . ويتضح من هذا التحليل أن :

القرار النهائى : شراء آلة محدودة الطاقة بتكلفة قدرها ٢٠٠ الف جنيه وربحاً متوقعا قدره ٢٩٤,٦ الف جنيه خلال عامين ، كذلك فإنه إذا اتضح أن الطلب متوسط أو مرتفع المستوى خلال السنة الأولى يجب عدم التوسع والإستمرار فى استخدام نفس الآلة خلال السنة الثانية .

إتخاذ القرارات فى ظل عدم التأكد

Decision Making Under Uncertainty

أوضحنا من قبل أن هذه هي الحالة التي لا تتوافر فيها أيه بيانات عن إحتمالات أن تسود الحالات المستقبلية المختلفة والتي تؤثر علي عملية إتخاذ القرار . ففي كثير من الحالات الواقعية قد يصعب وضع تقدير معين لإحتمال أن يسود ظرف معين في المستقبل . وتعد أزمة الخليج والعلاقات الدولية (وبالذات العربية) أحد الأمثلة الواضحة علي ذلك . وفي دنيا الأعمال فإن هذه الحالة تكون شائعة عندما يتقدم تقديم منتج جديد ليس للمنشأة خبرة سابقة في التعامل فيه ، أو عندما تقوم المنشأة بإدخال أسلوب إنتاجي جديد يتوقف نجاحه علي عوامل مستقبلية لم يتم التعرض لا من قبل . فعندما تم تقديم الكراسى البيضاء البلاستيك لأول مرة في مصر كان من الصعب التنبؤ (ولو في شكل تقديرات إحتمالية) بالحالات المستقبلية التي يمكن أن يكون عليها الطلب لذلك المنتج . فعلي الرغم من أنه يمكن القول بأن الطلب من الممكن أن يكون في شكل حالات ثلاث : مرتفع ومتوسط ومنخفض ، إلا إنه ليس هناك بيانات تاريخية سابقة يمكن الإعتماد عليها في تحديد إحتمال حدوث كل حالة من تلك الحالات . وعلي الرغم من الصعوبة الواضحة التي يواجهها متخذ القرار في ظل هذه الظروف إلا أنه ما زال مطالباً بإتخاذ قرار يتعلق بحجم الإنتاج الذي يقدمه في السوق .

وحتي يمكن مواجهة هذه الحالة من عدم التأكد uncertainty يمكن

الإعتماد علي أكثر من مدخل يساعد في إتخاذ القرار ، وسوف نتناول تلك المداخل في الأجزاء التالية :

أولاً : الإعتماد علي تقدير جزئي لإحتمالات حدوث بعض الظروف المستقبلية :

إفترضنا في حالة إتخاذ القرار في ظل الخطر أنه يمكن الوصول إلي تقدير لإحتمال حدوث كل حالة من الحالات المستقبلية المختلفة . ويمكننا الآن الإعتماد علي بعض البيانات الجزئية والتي تتعلق بإحتمال حدوث أحد الظروف المستقبلية (وليس كلها) في الوصول إلي مدي لصحة القرار الذي يمكن إتخاذه . وتقوم الفكرة الأساسية علي الإعتماد علي تلك المعلومة المتاحة في تحديد نقاط السواء لإحتمالات indifference probabilities حدوث الظروف المستقبلية المختلفة ، ثم تحديد المدي الملائم لكل بديل .

دعنا الأن نأخذ مثال يلائم تلك الحالة :

مثـــال :

تفكر الشركة القومية للطيران في تحديث أسطولها عن طريق شراء وحدات جديدة تجديدة . وكان أمامها ثلاثة بدائل هي : (أ) إضافه طائرتين عملاقتين لطيران المسافات الطويلة ، (ب) إضافة طائرتين متوسطتين للطيران المتوسط والقصير ، (جـ) عدم التوسع والإحتفاظ بالأسطول الحالي كما هو . وقد أوضحت دراسة السوق أن الطلب المستقبلي علي خدمة النقل للركاب التي تقدمها الشركة

يتوقف علي الحالة الأمنية التي تمر بها البلاد نظراً لتأثر حركة السياحة بالظروف الأمنية . وقد أوضحت الدراسات أن الحالات الأمنية التي يمكن أن تسود في الخمسة سنوات التالية هي :

(أ) إستقرار تام والعودة إلي الظروف الأمنة الطبيعية .(ب) إستمرار حالة التوتر كما هي في الوضع الحالي ، (جـ) التحول إلي ظروف أمنية أسوء . ويوضح الجدول التالي جدول العائد الصافي (بالمليون دولار) المشروط خلال السنوات الخمس القادمة في ظل ظروف التشغيل المختلفة وفي حالة البدائل الثلاث .

الحالة الأمنية / البدائل	أفضل	ثبات	أسوء
طائرتين عملاقتين	٥٥	٣٦	- ٢٤
طائرتين متوسطتين	٤٥	٤٠	- ٥
عدم التوسع	٣٥	٣٠	٢٠

ونظراً لصعوبة تحديد الإحتمالات الكاملة لكل الحالات الآمنية المستقبلية فقد بذلت الشركة جهداً كبيراً لتقدير إحتمال إستمرار الحالة الأمنية كما هي الآن (حالة الثبات) ، وقد توصلت إلي أن إحتمال ذلك هو ٦٠, . والسؤال الآن : ما هو المدي الإحتمالي للحالات الأمنية المختلفة الذي يفضل عنده الإعتماد علي أي من البدائل الثلاث ؟

الحـــل :

* إعتماداً علي البيانات الجزئية عن إحتمال ثبات الحالة الأمنية علي ماهي الان (٦٠,) ، وبإفتراض أن إحتمال تحسن الوضع الأمني إلي وضع أفضل يعادل ح فإن إحتمال تحقق وضع أمني أسوء

= ١ - ٦٠, - ح = (٤, - ح) .

* وحيث أن لدينا الآن تقديرات لإحتمالات الحدوث للحالات الأمنية الثلاث يمكن حساب القيم المتوقعة للعائد في ظل البدائل الثلاث كما يلي :

- القيمة المتوقعة للعائد في ظل البديل الأول (التوسع بطائرتين عملاقيتين)

= ٥٥ (ح) + ٣٦ (٦,) - ٢٤ (٤, - ح)

= ٧٩ (ح) = ١٢

- القيمة المتوقعة للعائد في ظل البديل الثاني (التوسع بطائرتين متوسطتين)

= ٤٥ (ح) + ٤٠ (٦,) - ٥ (٤, - ح)

= ٥٠ (ح) + ٢٢

- القيمة المتوقع للعائد في ظل البديل الثالث (عدم التوسع)

= ٣٥ (ح) + ٣٠ (٦,) + ٢٠ (٤, - ح)

= ١٥ (ح) = ٢٦

* إحسب نقاط التعادل الإحتمالي للقيمة المتوقعة للبدائل المختلفة علي النحو التالي :

- نقطة التعادل الإحتمالي للبديلين الأول والثاني

٧٩ (ح) + ١٢ = ٥٠ (ح) + ٢٢

٢٩ (ح) = ١٠

ومنها ح = $\frac{١٠}{٢٩}$ = ٣٤٤٨,

ويعني ذلك أنه إذا كان إحتمال تحسن الحالة الأمنية (ح) يعادل ٣٤٤٨, فإنه لا يوجد أي فرق بين إختيار البديل الأول (التوسع بطائرتين عملاقتين) أو البديل الثاني (التوسع بطائرتين متوسطتين) . وبالطبع فإنه إذا زادت فرصة تحسن الحالة الأمنية عن هذه القيمة فإن البديل الأول (التوسع بطائرتين عملاقتين) سوف يكون أفضل من البديل الثاني . لاحظ أن القيمة ٣٤٤٨, تعني أن إحتمال التحسن هو ٣٤٤٨, وإحتمال أن تصبح الحالة الأمنية سوء يعادل ٤, - ٣٤٤٨, = ٠٥٥٢,

أي أن ذلك يعني إجمالاً :

إحتمال التحسن = ٣٤٤٨,

إحتمال الثبات = ٦٠٠٠,

إحتمال إلي أسوء = ٠٥٥٢,

بمجموع كلي يعادل الواحد الصحيح .

- نقطة التعادل الإحتمالي للبديلين الأول والثاني

٧٩ ح + ١٢ = ١٥ ح + ٢٦

٦٤ ح = ١٤

ومنها ح = $\frac{١٤}{٦٤}$ = ٢١٨٧,

ويعني ذلك أنه إذا كان إحتمال تحسن الحالة الأمنية (ح) يعادل ٢١٨٧, فإنه لا يوجد فارق بين إختيار البديل الأول (التوسع بطائرتين عملاقتين) أو البديل الثالث (عدم التوسع علي الإطلاق). أما إذا زاد إحتمال التحسن عن تلك القيمة فإن البديل الأول سيكون هو الأفضل . كما أن هذا الوضع يعني إجمالاً أن :

إحتمال التحسن = ٢١٨٧,

إحتمال الثبات = ٦٠٠٠,

إحتمال إلي أسوء = ١٨١٣,

بمجموع كلي يعادل الواحد الصحيح .

- نقطة التعادل الاحتمالي للبديلين الثاني والثالث

٥٠ ح + ٢٢ = ١٥ ح - ٢٦

٣٥ ح = ٤

ومنها ح = $\frac{٤}{٣٥}$ = ١١٤٣,

ويعني ذلك أيضاً أنه إذا كان إحتمال تحسن الحالة الأمنية (ح) يعادل١١٤٣, فإنه لا يوجد فارق بين التوسع بالطائرتين المتوسطتين أو

عدم التوسع علي الإطلاق . أما إذا زاد إحتمال التوسع عن هذه القيمة كان من المفضل البديل الثاني (التوسع بطائرتين متوسطتين)

كما علي البديل الثالث (عدم التوسع) .

أن ذلك يعني إجمالاً أن :

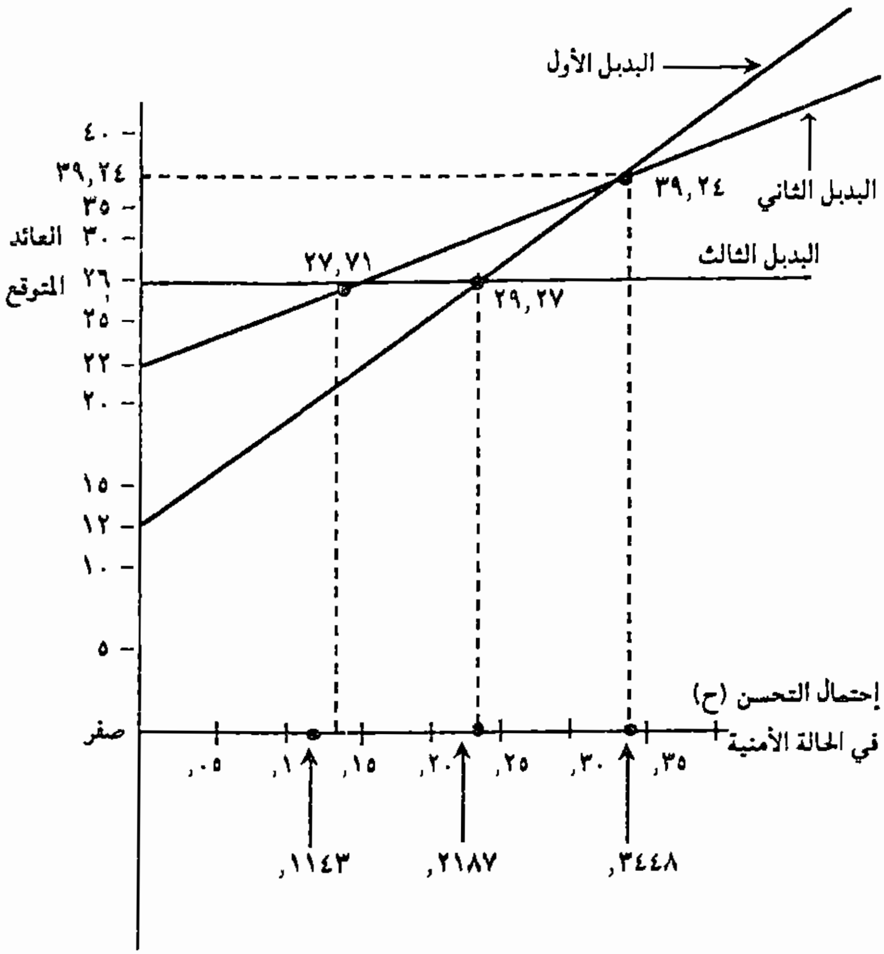
إحتمال التحسن = ١١٤٣,

إحتمال الثبات = ٦٠٠٠,

إحتمال إلي أسوء = ٢٨٥٧,

بمجموع كلي يعادل الواحد الصحيح .

* يمكننا الان تصوير العلاقة بين قيمة إحتمال تحسن الظروف الأمنية (ح) والقيمة المتوقعة في ظل البدائل الثلاثة (يمكن التعويض عن قيمة ح في معادلات القيم المتوقعة للوصول إلي تصوير دقيق لتلك المعادلات) كما في الشكل التالي :



ويتضح من هذا الشكل أن أفضل البدائل تتوقف علي إحتمال التحسن في الحالة الأمنية حسب القواعد التالية :

- إذا كان إحتمال تحسن الحالة الأمنية بين صفر ، ,١١٤٣ فيفضل البديل الثالث وهو عدم التوسع .

- إذا كان إحتمال تحسن الحالة الأمنية بين ,١١٤٣ ، ,٣٤٤٨ فيفضل البديل الثاني وهو التوسع بطائرتين متوسطتين .

- إذا كان إحتمال تحسن الحالة الأمنية أكبر من ٣٤٤٨, فيفضل الأخذ بالبديل الأول وهو التوسع بطائرتين عملاقتين .

وبسبب تلك العلاقات الخطية يمكن الإعتماد علي معادلات القيمة المتوقعة لكل بديل والتي توصلنا إليها من قبل في تحديد أفضل عائد متوقع في ظل المستويات المختلفة للمتغير (ح) وعلي أساس أفضل البدائل .

ثانياً : الإعتماد علي الإحتمالات المتساوية

عندما لا يكون هناك أية تقديرات لإحتمال حدوث بعض الأحداث المستقبلية ، فإنه يمكن الإعتماد علي قاعدة تقريبية (يطلق عليها قاعدة Laplace) تقوم علي إفتراض إحتمالات حدوث متساوية للظروف المستقبلية المختلفة . ففي مثالنا الحالي يمكننا إفتراض أن .

إحتمال تحسن الحالة الأمنية = $\frac{١}{٣}$

إحتمال ثبات الوضع الأمني = $\frac{١}{٣}$

إحتمال تدهور الأوضاع الأمنية = $\frac{١}{٣}$

ثم بعد ذلك نستخدم أسلوب القيمة المتوقعة المعتاد للمفاضلة بين البدائل علي النحو التالي :

- القيمة المتوقعة للبديل الأول (التوسع بطائرتين عملاقتين)

$$= ٥٥ \left(\frac{١}{٣} \right) + ٣٦ \left(\frac{١}{٣} \right) - ٢٤ \left(\frac{١}{٣} \right) = ٢٢,٣٣$$

- القيمة المتوقعة للبديل الثاني (التوسع بطائرتين متوسطتين)

$$= ٤٥ \left(\frac{١}{٣}\right) + ٤٠ \left(\frac{١}{٣}\right) - ٥ \left(\frac{١}{٣}\right) = ٢٦,٦٧$$

- القيمة المتوقعة للبديل الثالث (عدم التوسع)

$$= ٣٥ \left(\frac{١}{٣}\right) + ٣٠ \left(\frac{١}{٣}\right) + ٢٠ \left(\frac{١}{٣}\right) = ٢٨,٣٣$$

ويعني ذلك إنه حسب قاعدة الإحتمالات المتساوية للظروف المستقبلية يمكننا القول أن أفضل القرارات الآن هو عدم التوسع .

ثالثاً : معيار Maximin

وهي عبارة عن قاعدة متحفظة إلي درجة كبيرة تقوم علي إختيار أفضل العوائد من بين أقل العوائد المحسوبة لكل بديل . ويطلق عليها في بعض الأحيان قاعدة Wald . ويتم إستخدام تلك القاعدة علي خطوتين هما (بالتطبيق علي المثال الحالي الخاص بتوسع شركة الطيران) :

(أ) حدد أسوء (أقل) العوائد المشروطة لكل بديل ، وفي المثال الحالي هي :

بالنسبة للتوسع بطائرتين عملاقتين = - ٢٤

بالنسبة للتوسع بطائرتين متوسطتين = - ٥

بالنسبة لعدم التوسع = ٢٠

(ب) تم بإختيار أفضل تلك البدائل عن طريق إختيار أقصي قيمة من بين تلك القيم التي تم حسابها في (أ) . وفي المثال الحالي يتم إختيار البديل الثالث .

رابعاً : معيــار Maxinax :

وهي عبارة عن قاعدة متفائلة إلي حد كبير تقوم علي اقتراض كل ما هو مشجع في الظروف التي سوف تسود في المستقبل . وتقضي هذه القاعدة باختيار البديل الذي يحقق أعلي عائد متوقع من بيت أفضل العوائد المشروطة لكل البدائل المطروحة . ويكون ذلك عن طريق :

(أ) حدد أفضل (أقصي) العوائد المشروط لكل بديل ، وفي المثال الحالي (الخاص بتوسع شركة الطيران) تكون هي

بالنسبة للتوسع بطائرتين عملاقتين = ٥٥

بالنسبة للتوسع بطائرتين متوسطتين = ٤٥

بالنسبة لعدم التوسع = ٣٥

(ب) قم باختيار أفضل تلك البدائل عن طريق اختيار أقصى قيمة من بين تلك القيم التي تم حسابها في (أ) . وفي المثال الحالي يتم اختيار البديل الأول (التوسع بطائرتين عملاقتين) والذي يحقق عائداً قدره ٥٥ مليون دولار .

خامساً : معيار Minimax Regret

تقوم فكرة إستخدام هذا المعيار علي مفهوم تكلفة القرصة الضائعة Opportunity Cost التي قدمها L.J.Savage ، والتي يمكن أن يتحملها متخذي القرار في حالة إختيار البديل الخطأ في ظل حالة معينة من الحالات المستقبلية . وعلي ذلك فإنه يمكن حسابها لكل حالة مستقبلية علي أساس أنها الفرق بين أفضل العوائد المشروطة

والعائد المشروط الخاص بكل بديل ، ثم يتم بعد ذلك إختيار أقصي تكلفة فرصة ضائعة Regret لكل بديل وإختيار البديل ذو القيمة الأقل .

وبتطبيق ذلك علي المثال الحالي ، يمكننا إتباع الخطوات التالية:

(أ) قم بحساب قيمة تكلفة الفرصة الضائعة من جدول العائد الأصلي وذلك بإختيار أقصي عائد مشروط تحت كل حاة مستقبلية وطرح القيم الموجودة أمام كل بديل من تلك القيمة في ظل نفس الحالة المستقبلية . ويكون لدينا الجدول التالي :

الحالة الأمنية / البدائل	أفضل	ثابت	أسوء
طائرتين عملاقتين	صفر	٤	٤٤
طائرتين متوسطتين	١٠	صفر	٢٥
عدم التوسع	٢٠	١٠	صفر

لاحظ هنا أن القيم السالبة قد ساعدت علي زيادة قيمة تكلفة الفرصة الضائعة regret المحسوبة ، كما أن هناك علي الأقل صفر واحد في كل عمود .

(ب) حدد أقصي تضحية Maximum regret ممكن أن تحدث بالنسبة لكل البدائل بغض النظر عن الحالة الأمنية المستقبلية . وهي علي النحو التالي :

البدائل	أقصي تضحية
طائرتين عملاقتين	٤٤
طائرتين متوسطتين	٢٥
عـدم التوسـع	٢٠

(جـ) حتي تكون متحفظاً ، قم بإختيار البديل الذي يقلل أقصي تضحية إلي أقل حد ممكن . وفي المثال الحالي يكون البديل الأفضل هي « عدم التوسع » حيث أنه يضمن تدنية أقصي تضحية ممكنة .

سادساً : الإعتماد علي درجة تفاؤل متخذ القرار :

أوضحنا من قبل أن معيار Maximin يعتبر معياراً متحفظاً يعبر عن درجة عالية من التشاؤم لدي متخذ القرار ، كذلك فإن معيار Maximax يعبر عن حالة مفرطة من التفاؤل التي تسيطر علي متخذ القرار . وقد رأي Hurwicz أن كلا من الحالتين يعبران عن نوعاً من الأفراط أو التطرف سواء في التشائم أو التفاؤل . ولذلك قام بتقديم طريقة تأخذ في الحسبان درجة تفاؤل Coefficient of Optimism متخذ القرار وذلك من خلال مقياس (α) تنحصر قيمة بين صفر وواحد صحيح . فإذا كانت قيمة هذا المعامل تعادل صفر فإن ذلك يعني أن متخذ القرار متشائم تماماً ، ومن ناحية أخري إذا كانت قيمة المعامل α هي واحد صحيح فإن ذلك يعني التفاؤل التام من قبل متخذ

القرار . وبالطبع يكون لدي الأفراد درجة من درجات التفاؤل تنحصر بين صفر وواحد صحيح .

وإعتماداً علي تلك الفكرة قدم Hurwicz معادلة بسيطة لتحديد القيمة المرجحة المتوقعة للعائد المشروط (أطلق عليها بعض الكتاب Measure of realism) لكل بديل بإستخدام المعادلة التالية .

العائد المتوقع المرجع للبديل

= α (أقصي عائد مشروط) + (١ - α) (أدني عائد مشروط)

ثم يتم بعد ذلك اختيار البديل ذو قيمة العائد المتوقع المرجح الأكبر .

وبتطبيق ذلك علي المثال الحالي يمكننا القيام بالخطوات التالية :

(أ) تحديد الحد الأقصي والأدني للعائد المشروط لكل بديل بغض النظر عن الظروف المستقبلية . ويكون لدينا ما يلي :

البديـــل	الحد الأقصي للعائد	الحد الأدني للعائد
التوسع بطائرتين عملاقيتين	٥٥	٢٤ -
التوسع بطائرتين متوسطتين	٤٥	٥ -
عـــدم التوســـع	٣٥	٢٠

(ب) إختيار قيمة للمعامل α تعبر عن درجة تفاؤل متخذ القرار، دعنا نفترض أن تلك القيمة ٦, ، وبناءاً علي ذلك تكون قيمة العائد المتوقع المرجح للبدائل كما يلي :

- بالنسبة للبديل الأول (طائرتين عملاقتين) :

العائد المرجح المتوقع = ٦, (٥٥) + ٤, (- ٢٤)

= ٢٣,٤ مليون جنيه

- بالنسبة للبديل الثاني (طائرتين متوسطتين) =

العائد المرجح المتوقع = ٦, (٤٥) + ٤, (-٥)

= ٢٥ مليون جنيه

- بالنسبة للبديل الثالث (عدم التوسع) :

العائد المرجح المتوقع = ٦, (٣٥) + ٤, (٢٠)

= ٢٩ مليون جنيه

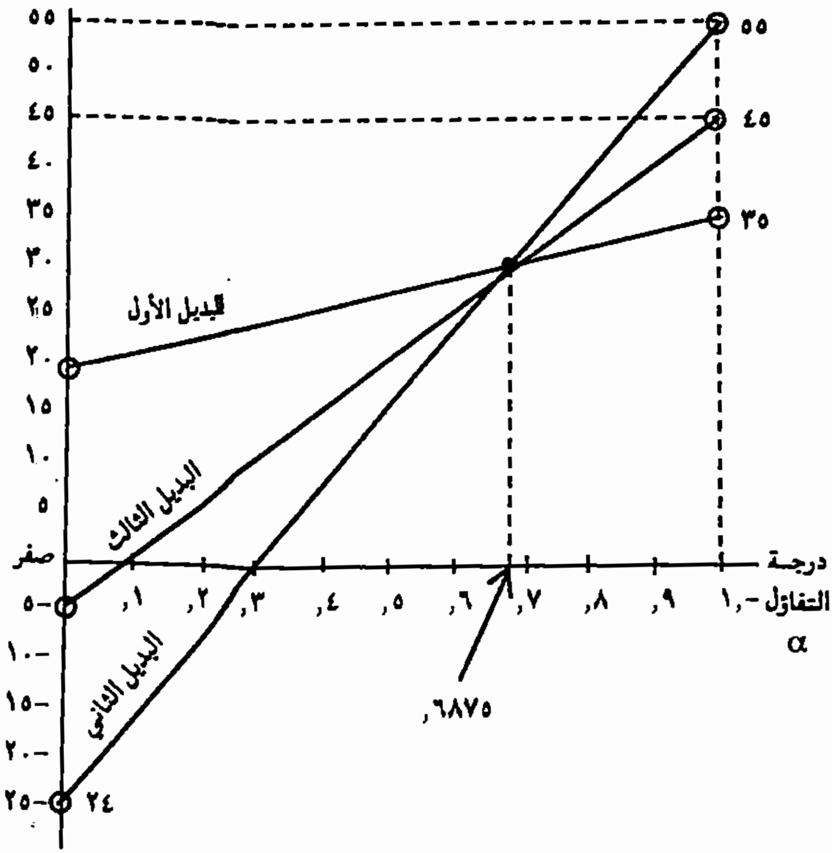
ويعني ذلك أنه بالنسبه لهذا النوع من متخذي القرار (المتفائل بدرجة ٦٠, والمتشائم بدرجة ٤٠,) يجب إختيار البديل الثالث والذي يقضي بعدم التوسع .

وحتي يمكن مساعدة متخذي القرارات (حسب درجة تفاؤلهم وتشاؤمهم) يمكن وضع تصور للعلاقة بين قيمة α والقيمة المتوقعة المرجحة للبدائل الثلاثة . والتي يمكن منها وضع مدي لتفضيل كل بديل حسب درجة تفاؤل كل متخذ قرار .

ففي المثال الحالي يمكن تحديد تلك القيم لمستويات مختاره منα سوف تساعدنا في الرسم البياني للقيمة المتوقعة المرجحة لتلك ابدائل

درجة التفاؤل (α)	البديل الأول	البديل الثاني	البديل الثالث
صفر	– ٢٤	– ٥	٢٠
١	٥٥	٤٥	٣٥

ويمكن تصوير ذلك علي النحو التالي



ويتضح من هذا الشكل أن هناك نقطة تقاطع بين كل من البديل الأول والبديل الثالث ، وعندما

$$(٢٠)\ (\alpha-١) + (٣٥)\ \alpha = (٢٤-)\ (\alpha-١) + (٥٥)\ \alpha$$

$$٤٤ = \alpha\ ٦٤$$

ومنها $\alpha = \frac{٤٤}{٦٤} =$,٦٨٧٥

وطالما أن الهدف هو تعظم العائد المتوقع المرجح فإنه يمكن القول بما يلي :

(أ) إذا كانت درجة تفاؤل متخذ القرار أقل من ٦٨٧٥, فإنه يجب إختيار البديل الثالث والذي يقضي بعدم التوسع .

(ب) إذا كانت درجة تفاؤل متخذ القرار تعادل أو تزيد علي ٦٨٧٥, فإنه يفضل إختيار البديل الأول والذي يقضي بالتوسع بشراء طائرتين عملاقتين .

(جـ) لا يمثل البديل الثاني أحد البدائل المطروحة في كل مستويات درجة التفاؤل . فأياً كانت درجة تفاؤل متخذ القرار سوف يؤدي إختياره للبديل الثاني إلي عدم تحقيق أقصي عائد متوقع .

الفصل الرابع

جـــدولة المشــروع

* تحليل شبكات الأعمـال
* أهم التطبيقات
* الخصائص الأساسية اللازمة لهذه المشروعات
* أهم الاصطلاحات
* أسلوب المسار الحرج CPM

تخفيض وقت إتمام المشروع (تحليل التكاليف)

* مراجـع الفصـل

جـــــدولة المشــــــروع

Project Scheduling

تحليل شبكات الأعمال Network Anaysis

ظهرت في نهاية الخمسينيات مجموعة من أساليب شبكات الأعمال وأهمها أسلوبي PERT,CPM. أما الأول فهو أسلوب المسار الحرج Critical Path Method والمعروف باختصار CPM، والثاني هو أسلوب تقييم ومـراجـعة البرامج Program Evaluation & Review Te-chingue والمعروف باختصار بيرت وبشكل عام ، يهدف كلا من الأسلوبين إلي تقديم مدخل بياني لجدولة وتخطيط المشروع يساعد مدير المشروع في تصور الأنشطة اللازمة والوقت المتوقع لإنجازها وتحديد العلاقات الفنية بينها ، وبالتالي تقدير الوقت للإنتهاء من المشروع . كذلك فإن كلا منهما يمكن من متابعة monitoring تقدم التنفيذ في الأنشطة للتعرف علي سير الأداء والكشف عن الاختناقات واتخاذ الإجراءات اللازمة لضمان حسن سير الأداء . وعلي وجه التحديد يحاول كلا من الأسلوبين الإجابة علي الأسئلة التالية :

١ ـ ما هو أقل وقت موقع يلزم لإتمام المشروع ككل ؟

٢ ـ ماهي الأنشطة التي تعد «حرجة » بالنسبة لمراحل إنجاز المشروع .

٣ ـ ما هو المسارالحرج ؟ وكيف يمكن تحديده .

٤ ـ ما هو أفضل جدول تشغيل (تواريخ البدء والإنتهاء) للأنشطة اللازمة للمشروع .

٥ ـ كيف يمكن ضغط رقت اتمام المشروع ؟ وما هي التكلفة الإضافية المترتبة علي ذلك .

وقد أصبح شائعا الآن استخدام اسلوب شبكات الأعمال في مجالات عديدة يصعب حصرها ، ومنها علي سبيل المثال .

١ ـ عمليات إنشاء المباني ، سواء كان ذلك للأسكان أو بناء الكباري والطرق والمصانع والمدارس والأنفاق والفنادق .

٢ ـ عملية ادخال منتج جديد فى السوق ، والذي عادة ما يمر بمراحل مختلفة تبدأ من ظهور الفكرة وتنتهي بالتصميم النهائي ووضع سياساته التسويقية .

٣ ـ عملية ادخال نظم المعلومات information Systems في الشركات ونظم الكومبيوتر بالمنشأة .

٤ ـ مشروعات الأبحاث والتطوير Research & Devvlopment التي تقوم بها الشركات سواءاً في مجالات التكنولوچيا أو التغيير الاداري والتنظيمي .

٥ـ جدولة عملية بناء السفن والطائرات وناقلات البترول وسفن الفضاء .

٦ ـ عمليات تصنيع وتجميع وإنشاء محطات الكهرباء ال؛بيرة وعمليات مد خطوط أنابيب الغاز والبترول .

٧ ـ برامج ادخال نظم للدفاع عن الجيش وبرامج انتاج الأسلحة والصواريخ .

٨ ـ عمليات تخطيط إنشاء المدن الجديدة واستصلاح الأراضى.

٩ ـ تخطيط برامج الصيانة وجدولتها .

أهم الاصطلاحات المستخدمة في تحليل شبكات الأعمال :

النشاط activity هو جزء محدد من المشروع والذي يستلزم اتمامه وقت معين . ومثال علي تلك الأنشطة : تجهيز أمر الشراء ، ارساء القواعد والأساسات لمنزل ، إدارة مفتاح تشغيل السيارة . ..، الخ .

الحدث event هو لحظة بدء أو إتمام لنشاط أو للمشروع . فلكل نشاط نقطة بدء ونقطة اتمام . وبالتالي فإن الحدث لا يستغرق أى فترة زمنية . وحتي يصل إلي حدث ، فإن كل الأنشطة التي تسبق الحدث يجب أن تكون قد تمت بالكامل .

النشاط الحرج critical activity هو النشاط الذي سوف يترتب علي تأخيره تأخير في إتمام المشروع بالكامل .المسار Path هو سلسلة من الأنشطة المتتابعة التي تقدم رابطة بين نقطة بدء ونقطة اتمام المشروع . المسار الحرج Critical Path هي سلسلة مستمرة من الأنشطة الحرجة التي تربط بين نقطة بدء ونقطة إتمام المشروع . وهو أطول المسارات علي الشبكة . ويعطي أقل وقت لازم لاتمام المشروع .

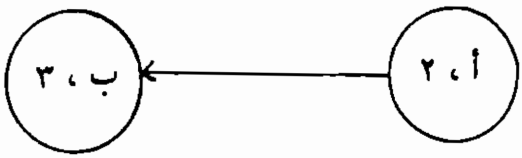
مثال :

يوضح الشكل التالي الحدث ١ الذي يعبر عن نقطة البدء لكل المشروع ، كما أنه نقطة البدء بالنسبة للأنشطة أ ، ب. كذلك فإن الأنشطة د ، هـ تتبع اتمام النشاط ب . أما النشاط ج فيتبع اتمام النشاط أ ، والنشاط ز يتبع اتمام الأنشطة ج ، هـ. ويتم المشروع بالكامل في الحدث ٥ ، وهو بالتمام عند اتمام الأنشطة هـ ، ز .

أوجه الشبه والإختلاف بين أسلوبي CPM, PERT

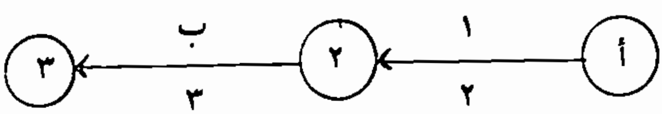
يتشابه أسلوبي CPM, PERT في أن كل منهما أساليب تستخدم في تخطيط وجدولة وضبط المشروعات ولكنهما يختلفان في عدة أمور أساسية أهمها:

١ ـ من حيث طريقة الرسم: عند رسم الشبكة حسب أسلوب المسار الحرج CPM فإن الدوائر تعبر عن الأنشطة Activity on Node (AON) والأسهم التي تربط الدوائر ببعضها تعبر فقط عن اتجاه العلاقات بين الأنشطة. كذلك فإن الوقت اللازم لاتمام النشاط يوضح داخل الدائرة المعبرة عن الشاط. ويتضح ذلك من المثال التالي:



وهو يعني أن الشبكة تتكون من نشاطين هما أ ، ب. والسهم يشير إلى أن النشاط أ يجب أن يتم قبل بدء النشاط ب، كذلك فإن الزمن اللازم لإتمام النشاط أ هو ٢ وحدة زمنية، والزمن اللازم لاتمام النشاط ب هو ٣ وحدات زمنية.

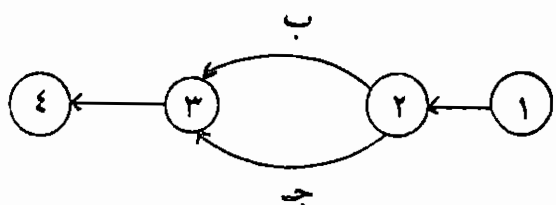
وعلى العكس من ذلك فإن أسلوب متابعة البرامج وتقييمها PERT يستخدم الدوائر nodes لتدل على بداية أو نهاية نشاط معين. وهي التي يطلق عليها حدث البدء Starting event وحدث الإتمام Completion event للنشاط. ولذلك تأخذ أرقام كما في المثال التالي:



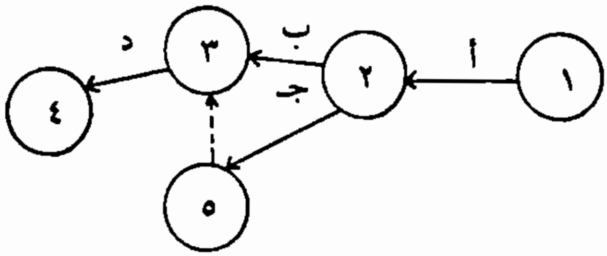
وهو يعبر عن ذات الشبكة التي تم رسمها حسب أسلوب CPM ويتضح منها أن الأنشطة يعبر عنها بأسهم تربط بين أحداث البداية والإتمام لكل نشاط Activity on Arrow (AOA). كما أن وقت النشاط يتم ايضاحه تحت السهم. وبالطبع قد يستخدم حدث الإنتهاء لنشاط كحدثاً للابتداء لنشاط آخر يليه في التتابع. كذلك فإن أكثر من نشاط قد يكون لهم نفس حدث البدء أو الإنتهاء.

٢ ـ يترتب على اختلاف طريق الرسم أننا قد نحتاج في أسلوب PERT إلى ما يعرف بالأنشطة الوهمية Dummy Activities، وهي أنشطة لا توجد أصلا في الشبكة ولكنها تلزم لتحقيق تناسق في الفهم العام لتتابع الأنشطة على الرسم. ولا يلزم الأمر استخدام هذا النوع من الأنشطة في طريقة المسار الحرج CPM. وطالما أنها أنشطة وهمية فإن الوقت اللازم لاتمامها يكون دائما صفر، كما يعبر عنها في الشبكة بخطوط متقطعة. وتظهر الحاجة إلى هذه الأنشطة الوهمية في الحالات التالية:

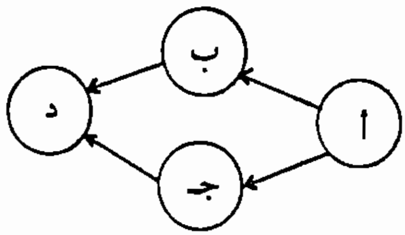
أ ـ عندما يكون هناك نشاطان لهما نفس نقطة البدء ونفس نقطة الانتهاء. ويتضح ذلك في الشكل التالي حيث يبدأ كل من ب ، ج من الحدث ٢ وينتهيان في الحدث ٣.



وطالما أن الأنشطة في PERT يتم تعريفها بنقطة البدء ونقطة الإنتهاء (الأحداث) فإن استخدام نفس الأرقام لتعريف الأنشطة، ب، ج يعد خطأ، وخصوصاً عند استخدام الكومبيوتر في حل مثل تلك المشاكل. فالنشاط بالنسبة لبرنامج الكومبيوتر يتم تعريفه برقمين الأول هو حدث البداية والثاني هو الاتمام. وللتغلب على هذه المشكلة يتم استخدام فكرة النشاط الوهمي كما يلي:



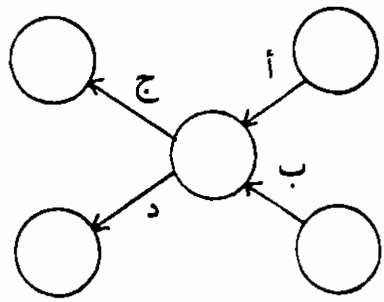
ويجب هنا ملاحظة أن ذلك لا يمثـل مشكلة في ظل طـريقة CPM حيث أن الشكل اللازم يكون هو:



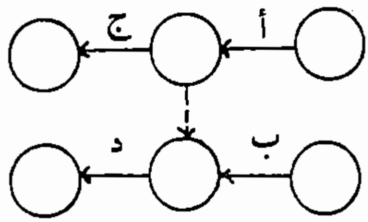
ب ـ في حـالة احتـمال حدوث خـطأ في تصويـر التتابـع الواجب لـلأنشطة: بافتراض أن النشاط أ فقط يجب إتمامه قبل البـدء في النشاط ج ثـم أن النشاط د يجب أن يكون مسبوقاً مباشرة بالأنشطة أ، ب. ويمكن التعبير عن ذلك في الجدول التالي:

النشاط	النشاط السابق مباشرة
أ	—
ب	—
ج	أ
د	أ ، ب

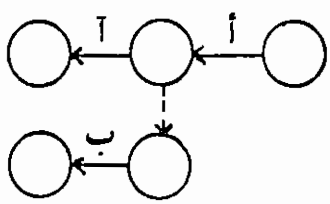
فعند تصوير ذلك على الشبكة باستخدام أسلوب PERT نجد أن هناك مشكلة. فإذا قمنا بتصويرها على النحو التالي:



نجد أن ذلك يعني أن أ ، ب يجب اتمـامها قبـل البدء في ج وذلـك أمر غـير لازم في هذه الحـالة . والحـل هو في عمـل نشاط وهمي عـلى النحو التالي .



جـ ــ في حالة اعتماد نشاط على آخر جزئياً Partial dependence . . فـإذا كان بـدء النشـاط ب يعتمـد عـلى اتمـام جـزء فقط من النشـاط أ، وليس بـالضرورة اتمام كـل النشاط . ومثـال ذلـك امكـانيـة البـدء في أعـمال البياض لأحد المنازل عند انهاء أعمال التوصيـلات الكهربـائية في جـزء منـه . فـلا داعي لـلإنتـظار حتى يتم انهاء كـل أعـمال التـوصيـلات الكهربائية في المنزل . ويتم تصوير ذلـك باستخـدام نشاطـاً وهمياً عـلى النحو التالي :



وتجدر الإشارة هنا إلى أن مقدار الوقت اللازم لإتمام النشاط الوهمي هو صفر في كل الحالات السابقة.

٣ ـ من حيث الوقت اللازم لإتمام النشاط . . . يقوم أسلوب CPM على تقديرات أرقام ثابتة (رقم واحد) للوقت اللازم لإتمام النشاط. ويطلق عليها أرقام الوقت التقديرية deterministic. وهي تفترض التأكد التام من أن التنفيذ سوف يتم حسب الأرقام المقدرة. أما أسلوب PERT فإنه يقوم على تقديرات احتمالية للوقت والتي يطلق عليها Probabilistic. فلكل نشاط يتم عمل ثلاثة تقديرات للوقت اللازم لإتمام النشاط، مع وضع توزيعاً احتمالياً يعبر عن احتمال تحقق كل منهم. والتوزيع الإحتمالي المستخدم في هذه الحالة هو توزيع بيتا Beta distribution والذي يستلزم ثلاثة تقديرات أساسية هي:

(أ) الوقت المتفائل Optimistic time

(ب) الوقت المتشائم Pissimistic time

(جـ) الوقت الأكثر حدوثاً Most likely time.

وسوف نتناول مفهوم ذلك تفصيلا عند الحديث عن أسلوب PERT في جزء منفصل.

٤ ـ ينبني على الاختلاف الثالث بين أسلوبي CPM, PERT أن وقت اتمام المشروع الذي يتم التوصل إليه في ظل أسلوب CPM يكون رقماً تقديراً واحداً. أما في ظل أسلوب PERT فإن مقدار وقت اتمام المشروع يكون مجرد متوسط الوقت المتوقع لإتمام المشروع وهو ما يطلق عليه القيمة المتوقعة. ويرجع ذلك إلى أن هذه القيمة محسوبة بناءاً على القيم المتوقعة لوقت الأنشطة الحرجة. وبسبب هذه الخاصية يمتاز أسلوب PERT بإمكانية عمل بعض التحليلات الاحتمالية حيث أن وقت اتمام المشروع يكون موزعاً معتدلاً normally distributed. ومن أمثلة هذه التحليلات.

(أ) ما هو إحتمال اتمام المشروع قبل تاريخ معين؟
(ب) ما هو احتمال تأخر المشروع عن تاريخ معين؟
(جـ) ما هو احتمال اتمام المشروع خلال فترة زمنية محددة؟

٥ ــ نظراً لظهور أسلوب CPM بشكل أساسي في البيئة الصناعية،واستخدامه في عمليات الجدولة ـ بعكس أسلوب PERT الذي ظهر في أبحاث الجيش الأمريكي ـ فإن أسلوب CPM قد تضمن عملية إضافة موارد إضافية جديدة بهدف تقليل وقت اتمام المشروع. وهو ما يعرف بتحليل الوقت والتكاليف كما سنوضحه فيما بعد.

يتضح من هذا العرض أن أسلوبي CPM, PERT بينهما تشابه كبير إلى أن هناك اختلافات أساسية بينهما. فتتلائم طريقة CPM مع أنواع المشروعات التي تكون فيها أوقات الأنشطة معروفة ومؤكدة. ولذلك فإنها تركز على الموائمة trade-off بين وقت اتمام المشروع وتكلفته.

أما الأسلوب PERT فهو أكثر فائدة في حالة عدم التأكد من وقت اتمام النشاط. وبصفة عامة، يمكن القول بأن مثل هذه الفروق والاختلافات هي مجرد اختلافات تاريخية. فمع استخدام الكومبيوتر في حل مثل هذه المشاكل يمكن تعديل المعلومات المتاحة بما يمكن من عمل التحليلات المطلوبة سواء بدأنا بمعلومات PERT أو CPM. وأهم هذه التحليلات هي:

١ ــ تحديد موعد اتمام المشروع.
٢ ــ تحديد الأنشطة الحرجة التي يجب أن تتم في موعدها حتى لا تؤخر اتمام المشروع ككل.
٣ ــ تحديد المسار الحرج، وهو أطول مسار على الشبكة.
٤ ــ تحديد الوقت المسموح للأنشطة الغير حرجة أن تتأخره دون التأثير على المشروع.

٥ ــ عمل الموائمة بين التكلفة الإضافية واتمام المشروع في وقت أقل.
٦ ــ عمل تحليلات احتمالية.
٧ ــ عمل تسوية لمقدار الجهد المبذول على الفترات المختلفة.

وسوف نتناول في الفصول التالية أسلوبي PERT, CPM في فصول مستقلة بشيء من التفصيل.

أسلوب المسار الحرج CPM

ظهر هذا الأسلوب في عام ١٩٥٧ علي يد كل من J. E. Kelly في شركة M. R. Walker, Remington-Rand في شركة Du Pont بغرض المساعدة في جدولة عمليات التعطل بسبب الصيانة في مصانع المواد الكيماوية . وقد ذاع صيت هذا الأسلوب الذي أطلق عليه أسلوب المسار الحرج Critical Path Method بسبب المزايا التي تحققت من استخدامه . فقد أدي استخدام هذا الأسلوب في أحد مصانع شركة Du Pont في مدينة بالولايات Louisville بالولايات المتحدة الأمريكية إلي تخفيض وقت الأعطال اللازمة لعمل برنامج الصيانة من ١٢٥ ساعة إلي ٧٨ ساعة .

ويمكن ايجاز الخطوات اللازمة لاستخدام أسلوب CPM فيما يلي:

١ ـ حدد كل الأنشطة التي سوف تستخدم في المشروع وعرفها بدقة .
٢ ـ حدد التتابع الفني اللازم والذي يحكم العلاقة بين الأنشطة .
٣ ـ وضح هذه العلاقات في شكل شبكة network لهابداية ونهاية (لا تلزم هنا أية أنشطة وهمية) .

٤ ـ حدد مقدار الوقت اللازم لاتمام كل نشاط ، وهو رقم وحيد لكل نشاط يعتمد علي أفضل تقدير best guess .

٥ ـ حدد النشاط الحرج .

ولايضاح كيفية القيام بهذه الخطوات سوف نعرض المثال التالي:

مثال :

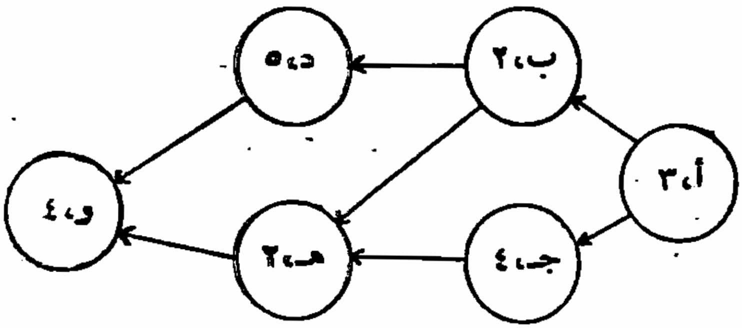
فيما يلي مجموعة الأنشطة اللازمة لاتمام مشروع معين وتتابعها الفني ، وكذلك الوقت اللازم لاتمام كل نشاط .

النشاط	النشاط السابق عليه مباشرة	الوقت اللازم
أ	-	٣
ب	أ	٢
جـ	أ	٤
د	ب	٥
هـ	ب، جـ	٢
و	د ، هـ	٤

الخطوة الأولي :

هي رسم الشبكة . باستخدام أسلوب CPM يمكن تصوير المشروع علي النحو التالي (شكل ٣ – ١) .

(شكل ٣ - ١)



الخطوة الثانية :

تحديد أقل وقت يلزم لاتمام المشروع . يمكن تحديد أقل وقت باستخدام أسلوبين . أما الأول فهو تحديد مجموعة المسارات التي تبدأ من نقطة بداية المشروع وتنتهي عند نهايته . ثم اختار أطول مسار ليمثل أقل وقت لازم لاتمام المشروع . ويعاب علي هذا الأسلوب أنه لا يصلح فقط إلا في حالة الشبكات المحددة ذات الأنشطة القليلة والعلاقات البسيطة ، ولذلك يستخدم الأسلوب الثاني بشكل واسع والذي يقوم علي القيام بعدة خطوات نظامية محددة للتوصل إلي أقل وقت ممكن . وسوف نقوم بعرض الأسلوبين بالتطبيق علي هذا المثال .

أولا : عن طريق تحديد المسارات :

المسارات هي : أ ---> ب ---> د ---> و

أ ---> ب ---> هـ ---> و

أ ---> جـ ---> هـ ---> و

وبجمع قيم الأوقات اللازمة لكل نشاط والموجودة علي المسار يمكن تحديد الوقت اللازم لكل مسار علي النحو التالي :

المســار الأول ٣ + ٢ + ٥ + ٤ = ١٤ يوم

المسار الثاني ٣ + ٢ + ٢ + ٤ = ١١ يوم

المسار الثالث ٣ + ٤ + ٢ + ٤ = ١٣ يوم

وفي هذه الحالة يتم اختيار المسار الأول ، حيث أنه يمثل أطول مسار في الشبكة . وهو الذي يحدد أقل وقت لازم لاتمام المشروع ككل ، وهو ١٤ يوم في هذا المثال .

ويلاحظ هنا أنه علي الرغم أننا نبحث عن أقل وقت ممكن لاتمام المشروع إلا أننا اخترنا أطول مسار في الشبكة . وعلي الرغم من أن هناك تناقض ظاهري في تلك العبارة إلا أنها صحيحة تماما فاتمام المشروع سوف يرتبط بأبطء مسار ، وفي هذه الحالة هو المسار الأول .

ثانيا : عن طريق تحديد أوقات البدء والانتهاء :

علي الرغم من سهولة الأسلوب الأول إلا أنه لا يصلح إلا ففي حالات الشبكات البسيطة كذلك فإنه لا يخدم الفرض الأساسي من تحليل مثل هذه الشبكات وهو تحديد جدول لوقت البدء ووقت الاتمام لكل نشاط . فغالبا ما يحتاج المسئول عن المشروع إلي وضع جدول زمني محدد البدء والاتمام لكل نشاط حتي يتم اتمام المشروع في موعده كما أن هذا الجدول يكون أساسا له لتحديد موعد احتياج المواد

والمستلزمات اللازمة لاتمام كل نشاط . ولذلك فإن التحليل الأكثر فائدة هو الذي يعتمد علي هذه الطريقة الثانية

وتبدأ هذه الطريقة بحساب أربعة أرقام (قيم) أساسية لكل نشاط هي :

١ ـ أول وقت بدء ممكن (وب) Earliest Start (ES)

٢ ـ أول وقت اتمام ممكن (وت) Earliest Finish (EF)

٣ ـ آخر وقت بدء مسموح (خ ب) Latest Start (Ls)

٤ ـ آخر وقت اتمام مسموح (خ ت) Latest Finish LF

ويعرف أول وقت بدء ممكن ، بأنه اللحظة التي يمكن للمسئولين عن النشاط البدء فيه فورا دون تأخير ، وبمجرد أن تسمح بذلك الظروف الفنية الخاصة بتتابع الأنشطة . وعلي ذلك فإن أول وقت اتمام ممكن يكون هو لحظة اتمام النشاط إذا لم يكن هناك تأخير في لحظة البدء، أو في وقت انجاز النشاط . ولذلك فإن :

أول وقت اتمام ممكن = أول وقت بدء ممكن + الوقت اللازم لانجاز النشاط (١)

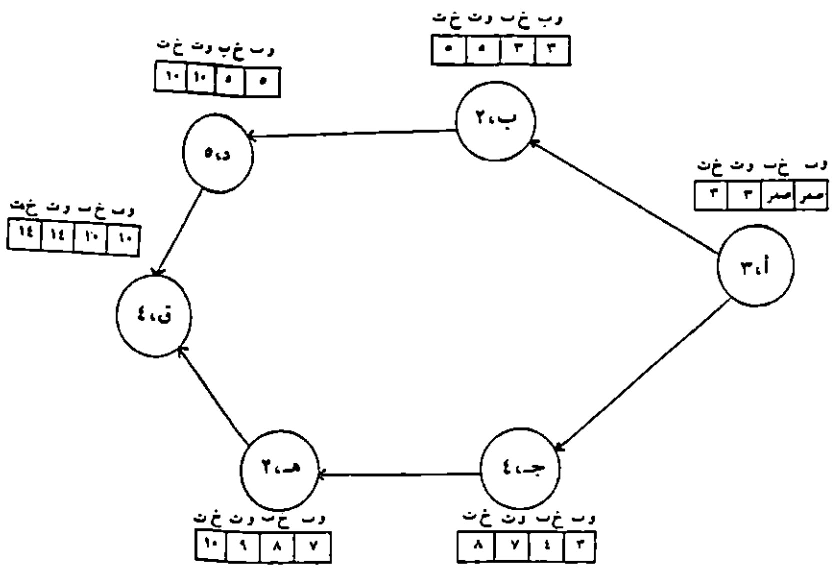
أما آخر وقت اتمام مسموح ، فهو عبارة عن آخر لحظة مسموح للمسئولين عن النشاط فيها باتمام هذا النشاط . ويعني ذلك أن يقوموا بتسليم النشاط المسند إليه بعد أن تم انجازه بالكامل . وبلغة الجيش أن يقوموا « باعطاء التمام » . وعلي ذلك فإن آخر وقت بدء مسموح يكون هو اللحظة التي إذا حدث تأخير عن بدء النشاط فيهااعتبر ذلك تأخيرا . وحتي لا يحدث هذا التأخير فإن البدء يجب أن يكون قبل

آخر وقت اتمام مسموح بوقت كاف لانجاز المشروع . ويتضح ذلك في العلاقة التالية :

آخر وقت بدء مسموح = آخر وقت اتمام مسموح- الوقت اللازم لانجاز النشاط (٢)

دعنا نقوم بتطبيق هذه المفاهيم والحسابات علي المثال الذي بين أيدينا ، والذي يمكن أن نتتبع خطواته علي الشكل (٣ - ٢) والذي يلاحظ عليه أننا قمنا لكل نشاط بعمل مستطيل مكون من أربعة أجزاء يمثل الأول منها أول وقت بدء ممكن (وب) والثالث منها أول وقت اتمام ممكن (وت) . كذلك فإن الثاني منها يمثل آخر وقت بدء مسموح (خ ب) والرابع يمثل آخر وقت اتمام مسموح (خ ت) . ويتم حساب قيم هذه الأوقات علي النحو التالي :

شكل (٣ ـ ٢)



بالنسبة للنشاط الأول أ :

نظرا لأن ذلك هو أول الأنشطة ولا يستلزم القيام به اتمام أي نوع آخر من النشاط قبله ، فإنه فإن أول وقت بدء ممكن (وب) بالنسبة له يكون هو لحظة بدء المشروع . وطالما أننا لانحدد ذلك التاريخ أو الوقت من الآن ، فإن ذلك يرجع إلي من سوف يقوم بتنفيذ الخطة ، فإننا نقول أن البدء اللحظي يعني أن أ سوف يبدأ في الوقت صفر . وبلغة العمليات العسكرية ، هذه هي « ساعة الصفر». وعند تحديد موعد فعلي لبدء المشروع ككل قد يكون هذا الصفر معناه الخامس عشر من يناير أو أو فبراير أو أى تاريخ معين .

وينبني علي ذلك أن أول وقت اتمام ممكن للنشاط أ حسب المعادلة (١) هو (صفر - ٣) = ٣ . ويعني ذلك أن النشاط أ يمكن اتمامه بعد ثلاثة فترات زمنية (أيام أو ساعات) من بدء المشروع ككل . وذلك بفرض أن هناك بدء فوري واتمام للنشاط في الوقت المحدد له . ولذلك أطلق عليه أول وقت إتمام ممكن .

بالنسبة للنشاط ب :

نظرا لأنه لا يمكن البدء في هذا النشاط إلا بعد اتمام النشاط (أ) والانتهاء منه ، فإنه أول وقت بدء ممكن هو مجرد الانتهاء من النشاط أ ويكون ذلك هو ٣ . أى بعد ثلاثة فترات زمنية (ساعات مثلا) من بدء المشروع ككل وحيث أن الوقت اللازم هو ٢ فإن أول وقت

انتهاء ممكن بغرض عدم تأخر البدء أو انجاز النشاط يكون هو (٣ + ٢ = ٥) حسب المعادلة (١) أيضا .

بالنسبة للنشاط جـ :

باستخدام نفس المنطق المتبع في (ب) نجد أن أول وقت بدء ممكن هو ٣ وأن وقت اتمام النشاط ب هو ٧ .

بالنسبة للنشاط د :

بتأمل الشبكة نجد أنه يتوقف علي اتمام النشاط ب ولذلك فإن و ب للنشاط د = ٥ كما أن وت = ٥ + ٥ = ١٠ .

بالنسبة للنشاط هـ :

بالنظر إلي التتابع الوارد في الشبكة نجد أن مجرد البدء في النشاط هـ يتوقف علي اتمام كلا من الأنشطة ب ، جـ . وحيث أن أول وقت أتمام للنشاط ب هو ٥ وأول وقت اتمام للنشاط جـ هو ٥ فإن أول وقت بدء ممكن لنشاط هـ يكون أكبر الرقمين . ويرجع ذلك إلي الاستحالة الفعلية للبدء إلا بعد انتهاء النشاط الأكثر تأخيرا . ولذلك فإن وب للنشاط هـ = ٧. وحسب المعادلة (١) فإن وت = ٧ +٢=٩ .

بالنسبة للنشاط و :

وهو النشاط الذي يعد آخر نشاط لازم للمشروع . فبمقارنة ١٠ ، ٩ نجد أن وب لهذا النشاط = ١٠ كما أن وت = ١٤ . ويعني ذلك أن أول وقت ممكن فيه اتمام النشاط و هو بعد ١٤ فترة زمنية من بدء المشروع .

من هذا العرض يمكن التوصل بسهولة إلي ما يسمي بالحد الأدني من الوقت اللازم لاتمام المشروع . وهو ١٤ فترة زمنية نظرا للأن النشاط و هو آخر نشاط في سلسلة الأنشطة اللازمة للمشروع .

نود هنا أن نوضح أن هذا التحليل قد حدد فقط الوقت اللازم للمشروع دون تحديد لنفس المسار الحرج . وتحديد هذا المسار يقضي تحديد لمجموعة الأنشطة الحرجة كما سنري في الجزء الثاني .

الخطوة الثالثة : تحديد المسار الحرج :

في بعض الشبكات البسيطة يمكن التوصل ، كما ذكرنا سابقا ، إلي المسار الحرج بمجرد النظر إلي الشبكة . فهو أطول المسارات علي الشبكة . وعلي ذلك فهو المسار أ ، ب ، د ، هـ في مثالنا البسيط ، ولكن في الشبكات الأكثر تعقيدا ، وباستخدام الكومبيوتر ، يتم الاعتماد علي أسلوب تحديد أوقات البدء والانتهاء في تحديد النشاط الحـــرج .

ففي المثال الحالي يتم تحديد قيم كل من خ ب ، خ ت الخاصة بكل نشاط . ويتم ذلك بدءا من آخر نشاط لازم لاتمام المشروع ، وهو النشاط و في مثالنا هذا . فنقوم بتحديد آخر وقت للاتمام مسموح به للمشروع ككل . ويرجع ذلك إلي أن معني الحرجة هي أنها الأنشطة التي إذا تأخرت ترتب علي ذلك تأخير في إتمام المشروع ككل . ويعني ذلك ضمنيا أن هناك تاريخ محدد للانتهاء من المشروع . أي أن هناك مايشابه العقد الذي تم توقيعه بين الشركة المنفذة والجهة التي تحتاج إلي المشروع . والذي ينص علي تاريخ انتهاء محدد . وطالما أن أقرب

وقت يمكن للشركة المنفذة أن تعد به الجهة المحتاجة هو ١٤ حسب الحسابات السابقة لقيم أول وقت اتمام للمشروع وللأنشطة ، فإن ثأت الرقم يستخدم كأنه نهاية لا يجب تجاوزها ويوضع في خانة خ ت للنشاط و .

بالنسبة للنشاط و :

طالما أن آخر وقت مسموح به الانتهاء من المشروع هو بعد ١٤ يوم من البدء خ ب للنشاط و هي ١٤ - ٤ = ١٠ وذلك حسب المعادلة (٢) .

بالنسبة للنشاط د :

إذا كان من المفروض أن آخر وقت مسموح به لأن يبدأ النشاط وهو ١٠ فإن د يجب ألا يتأخر إتمامه بأى حال من الأحوال عن هذه اللحظة . ولذلك فإن خ ب في النشاط و هي التي تحكم قيمة خ ت في النشاط د . وعلي ذلك فإن خ ب للنشاط د = ١٠ - ٥ = ٥ حسب المعادلة (٢) .

بالنسبة للنشاط هـ :

بنفس المنطق المستخدم في د فإن موعد بدء النشاط و يحكم آخر وقت للانتهاء من النشاط هـ وبذلك فإن قيمة خ ت للنشاط هـ هي ١٠ ، وبطرح الوقت اللازم للنشاط هـ من هذه القيمة نصل إلي خ ب للنشاط هـ والتي تساوي ٨ .

بالنسبة للنشاط ب :

نظرا لأن بدء الأنشطة د ، هـ يتوقف علي اتمام ب وأن آخر موعد مسموح للنشاط د لبدء هو ٥ بينما هو ٨ بالنسبة للنشاط هـ فإن آخر

وقت يسمح فيه للاتمام للنشاط ب يكون هو أقل الرقمين وهو ٥ وعلي ذلك فإن خ ب للنشاط ب تكون هي ٣ .

بالنسبة للنشاط جـ :

نظرا لارتباطه بالنشاط هـ فإن خ ت = ٨ ، خ ب = ٤ .

بالنسبة للنشاط أ :

بمقارنة خ ب للنشاط ب ، خ ب للنشاط ح يتم الوصل إلي خ ت للنشاط أ وهو ٣ . وبالتالي فإن خ ب للنشاط أ هو صفر .

ويمكن الآن ايجاز هذه القيم في الجدول التالي :

النشاط	أول وقت بدء ممكن وب	آخر وقت بدء مسموح خ ب	أول وقت اتمام ممكن و ت	آخر وقت اتمام مسموح خ ت	الوقت الزائد
أ	صفر	صفر	٣	٣	صفر
ب	٣	٣	٥	٥	صفر
جـ	٣	٤	٧	٨	١
د	٥	٥	١٠	١٠	صفر
هـ	٧	٨	٩	١٠	١
و	١٠	١٠	١٤	١٤	صفر

ومن هذا الجدول يمكن تحديد ما يسمي بالوقت الزائد أو الفائض slack لكل الأنشطة كما هو واضح في العمود الأخير بالجدول. والفائض هو عبارة عن أقصي قدر من الوقت يمكن أن يتأخر به اتمام النشاط دون أن يسبب تأخيرا في وقت اتمام المشروع ككل . ويمكن التوصل إليه عن طريقتين :

الفائض = آخر وقت بدء مسموح - أول وقت بدء ممكن .

الفائض = آخر وقت اتمام مسموح - أول وقت اتمام ممكن .

ويجب دائما أن تكون النتيجة واحدة في الحالتين بالنسبة لذات النشاط ، فعلي سبيل المثال بالنسبة للنشاط أ الفائض = صفر - صفر = صفر وهو تماماً يعادل ٣ -٣ = ١ كذلك فإن القبض بالنسبة للنساط جـ = ٤= ـ٣ =١ وهي بالتمام القيمة ٨ - ٧ = ١ .

ونلاحظ أيضا أن قيمة هذا الفائض سوف تكون دائما رقما موجبا أو صفرا . فلا يمكن أن يكون رقما سالبا إلا إذا كان هناك خطأ حسابيا . أما القيم الموجبة فتعني أنه يمكن تأخر النشاط في حدود تلك القيمة دون أن يسبب ذلك تأخيرا للمشروع ككل . فالنشاط جـ علي سبيل المثال يمكن أن يتأخر اتمامه يوما كاملا دون التأثير علي اتمام المشروع في ١٤ يوما أما إذا تأخر بمقدار يومين أو أكثر فإنه بالتأكيد سوف يؤدي إلي تأخير المشروع ـ

وقد يكون هذا التأخير في صورة تأخير تاريخ البدء أو استغراق وقت أطول في تنفيذ النشاط عما كان مقررا له . وقد يكون سبب كل ذلك تأخر ورود المواد والأدوات اللازمة أو العمالة الكافية . أو بسبب خطأ في عملية التقدير .

ومن جهة أخري فإن القيم الصفرية للفائض تعني أنه ليس هناك مجال لتأخير هذا النشاط فأي تأخير فيه سوف يؤثر مباشرة علي المشروع ككل ولذلك تسمي الأنشطة ذات الفائض الذي قيمته صفر بالأنشطة الحرجة Critical activities . وتمثل الأنشطة الحرجة التي تقع علي مسار معين ما يسمي بالمسار الحرج والذي يعد أطول مسارا علي الشبكة وهو الذي يعبر أيضا عن أقل وقت لازم لاتمام المشروع .

وبتأمل المثال نجد أن المسار الحرج الذي يجمع الأنشطة الحرجة هوالمسار

أ ---> ب ---> د ---> و

ويجب أن ننوه هنا إلي أنه من الممكن أن يكون هناك أكثر من مسارا حرجا كما أنه من الممكن وجود النشاط الحرج الواحد علي أكثر من مسار .

ويفيد تحديد المسار الحرج في أمرين : أما الأول فهو تحديد الأنشطة الحرجة التي يجب أن تتم ملاحظة عملية تنفيذها بعناية كاملة. فهي سوف تحتاج إلي عملية اشراف إداري خاصة للتأكد من أن يتم البدء في التاريخ المحدد وأن يتم التنفيذ خلال المدة المحددة . ويقتضي ذلك التأكد من أن كافة الموارد اللازمة متاحة لها والاستعداد بموارد احتياطية لتفادي عملية التأخير . كذلك قد تستخدم بالنسبة لها خرائط متابعة تنفيذ خاصة مثل خرائط جانت للتأكد من السير حسب برنامجها الموضوع .

أما الفائدة الثانية من تحديد الأنشطة الحرجة فهي تحديد أوجه النشاط التي يجب تقليل فترة انجازها إذا كانت هناك رغبة في تخفيض وقت اتمام المشروع بقدر معين من الوقت فإذا قدر لعملية عسكرية أن تتم خلال فترة زمنية معينة واتضح بعد ذلك أن العدو قد حصل علي أنواع من المعدات تسمح له بالاستجابة لمثل هذه العملية في فترة أقل من الوقت المقدر لها فإن الأمر يستلزم محاولة وضع خطة لاتمام العملية في وقت أقل ، ويكون ذلك بالتركيز علي الأنشطة الحرجة كما سنري في الجزء التالي .

تحليل الفائض الإجمالي والفائض الحر :

أوضحنا في جزء سابق أن الفائض الإجمالي للنشاط هو أقصي وقت ممكن أن

يتأخر به اتمام نشاط معين دون أن يؤثر ذلك على موعد إتمام المشروع ككـل. وعلى ذلـك فإن هـذا النوع من الفـائض يقيس علاقـة التأثـير المباشر بـين نشـاط معـين والمشروع ككـل. وبالإضـافة إلى هـذا النوع من الفـائض يوجـد أيضاً مـا يسمى بالفائض الحر Free Slack. وهو عبارة عن الوقت الذي يمكن أن يتأخر به نشـاطاً معيناً دون أن يؤثر ذلك على البداية المبكرة (و ب) لنشاط آخر يليه. ويتم حسـاب الوقت الزائـد الحر للنشـاط عن طريق الفـرق بين أول وقت إتمـام للنشاط (و ت) وأقل وقت من بين كل أوقات البدء المبكرة (و ب) لكافة الأنشطة التي تليه مبـاشرة والتي تتوقف عليه immediate successors. ففي مثالنا الحـالي نجد أن النشـاط حـ ليس له فائض حر ويرجع ذلك إلى أن تأخيره بيوم واحد سوف يؤدي إلى أن يصبح أول وقت اتمام ممكن له هـو ٨، ويعني ذلك أن أول وقت إتمـام للنشاط الـذي يليه وهو هـ سوف يتأخر بيوم ليصبح ٨ أيضـاً. ويمكن الوصـول لتلك النتيجة مبـاشرة عن طريق المعادلة التالية:

الفائض الحر للنشاط = [أقل وقت بين أول وقت بدء للأنشطة التي تلي النشاط جـ مباشرة] - أول وقت إتمام للنشاط جـ

وحيث أن الذي يلي النشاط حـ مباشرة هو نشاط واحد هو هـ فـإن الفائض الحر للنشاط حـ = و ب (للنشاط هـ) ـ و ت (للنشاط جـ)

= ٧ - ٧ = صفر

وبالنسبة للنشاط هـ فإن الوقت الفائض

= و ب (للنشاط و) - و ت (للنشاط هـ)

= ١٠ - ٩ = ١

أما الفائض الحر لباقي الأنشطة على الشبكة فهو صفر. ويمكن إيضاح ذلك على سبيل المثال للنشاط أ.

الفائض الحر للنشاط أ = [أقل وقت من بين و ب للنشاط ب و ب للنشاط جـ] - و ت (للنشاط أ)

= ٣ - ٣ = صفر

الفائض الحر للنشاط ب = [أقل وقت من بين و ب للنشاط د و ب للنشاط هـ] - و ت (للنشاط ب)

= [أقل وقت من بين ٥ ، ٧] - و ت (للنشاط ب)

= ٥ - ٥ = صفر

والقاعدة عامة:

إذا كان وقت الفائض الإجمالي لأي نشاط يساوي صفر فإن الفائض الحر لهذا النشاط لابد أن يساوي صفرا أيضاً. بمعنى آخر فإن كل الأنشطة الحرجة على المسار الحرج تكون أرقام الفائض الاجمالي والفائض الحر لكل منها مساوية للصفر.

كذلك فإن هذا المثال يوضح أنه على الرغم من أن هناك بعض الأنشطة الغير حرجة التي وقتها الفائض الاجمالي موجب، كما هو الحال بالنسبة للنشاط جـ فإن وقتها الفائض الحر يساوي الصفر. أي أن لها وقت فائض إجمالي وليس لها وقت فائض حر. فالنشاط الذي له وقت زائد إجمالي موجب قد أو قد لايكون له وقت زائد حر. وفي كل الحالات التي أوضحناها لا يجب أن يزيد وقت الفائض الحر عن الوقت الفائض الإجمالي كما ذكرنا سابقاً (راجع الأمثلة مرة أخرى للتأكد من ذلك).

ويفيد هذا التحديد لكل من الفائض الإجمالي والفائض الحر لكل نشاط في تقدير درجة المرونة المتاحة أمام مدير المشروع في جدولة النشاط. فعندما يكون للنشاط وقت فائض إجمالي قدره صفر فإن ذلك يعني أن جدول هذا النشاط لايمكن تأخيره (فأول وقت للبدء هو آخر وقت للبدء). وأي تأخير في وقت البدء المحسوب سوف يترتب عليه تأخير المشروع ككل. أما الأنشطة التي لها وقت فائض إجمالي، فإنها تتيح للقائمين على جدولة الأنشطة نوع من المرونة في تحديد تاريخ البدء لهذا النشاط. وذلك يفيد في إمكانية عمل تسوية smoothing لمستويات الطاقة التي يتم استخدامها. فبدلاً من أن يكون هناك ضغط peak على بعض الموارد المشتركة لفترات محددة وتركها دون استخدام في فترات أخرى فيمكن تحمل توزيع معتدل لإستخدامات الموارد Load Leveling عن طريق إعادة جدولة الأنشطة التي ليست حرجة، أي التي يمكن تأخيرها في حدود وقت معين دون التأثير على وقت إتمام المشروع. ويفيد ذلك، كما سنرى فيما بعد، في تفادي التكاليف الزائدة المترتبة على عملية تغيير مستوى الطاقة المستخدمة. فبدلاً من أن يعمل الأفراد ورديات إضافية في فترة محددة (مما يترتب عليه تكاليف أعلى) يمكن العمل خلال الورديات الأصلية ولكن على فترات مختلفة إذا أمكننا إعادة جدولة الأنشطة.

كـذلـك الأمـر بـالنسبـة لـلأنشـطة ذات الـوقت الفـائض الحـر. فـيمكن استخدامها بفعـالية عند تحديد مستـويات التشغيـل. على سبيـل المثال، إذا كـان لنشاط معين فائض حر، يمكن للمشرف أن يمنح نوع من المرونة في تقرير متى يبدأ النشاط. فحتى إذا أخر وقت بدء النشاط بوقت معادل (أو أقل من) الفائض الحر، فـإن ذلك التـأخير سـوف لا يؤثر عـلى أوقـات البـدء أو مقـدار الفـائض الخـاص بالأنشطة التالية. وذلك أمر غير ممكن بالنسبـة للأنشـطة التي ليس لديهـا أي وقت فائض حر. وبتطبيق ذلك على المثال الحالي نجد بعض الحقائق :

- إن تأخير النشاط هـ فقط في حدود الـوقت الفائض الإجمـالي (وهو يـوم واحد) سوف لا يؤخر إتمام المشروع أما تأخيره بأكثر من هذا الفائض فإنه سوف يؤدي بالضرورة إلى تأخير المشروع.

- إن تأخير النشاط جـ فقط في حدود الـوقت الفائض الإجمـالي (وهو يـوم واحد) سوف لا يؤخر إتمام المشروع أما تأخيره بأكثر من هذا الفائض فإنه سوف يؤدي بالضرورة إلى تأخير المشروع.

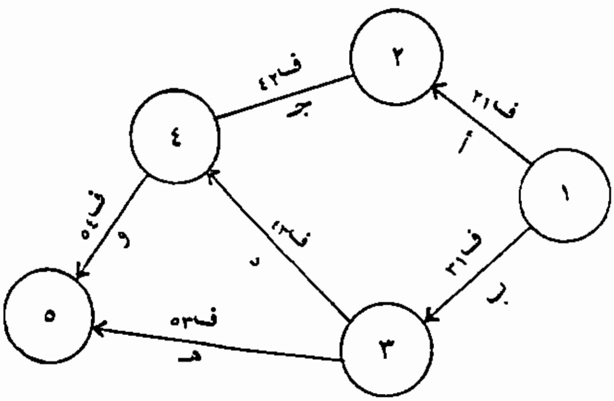
- إن وجـود أكثر من فـائض إجمالي لكـل نشاط لا يعني إمكـانية تـأخير كـل هذه الأنشطة في حدود تلك الأوقات الخاصة بكل منها دون أن يؤثر ذلـك على وقت إتمام المشروع. ففي مثالنا الحالي نجد أن تأخير النشاط (و) بيوم والنشاط (هـ) بيوم سوف يؤدي بالضرورة إلى تأخير وقت إتمام المشروع بيـوم. أما وجـود أكثر من فائض حر لكل نشاط فـإن يعني إمكانيـة كل هـذه الأنشطة في حـدود تلك الأوقات الخاصـة بها دون أن يؤثـر على وقت إتمـام المشروع. وهذا يعـد فارقـاً أساسياً بين مفهوم واستخدام فكرتي الفائض الإجمالي والفائض الحر.

إستخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة المسار الحرج

سوف نتناول في هذا الجزء استخدام البرمجة الخطية* في تحديد (١) أقل وقت يلزم لإتمام المشروع و (٢) المسار الحرج. وسوف نعرض ذلك في خلال مثال في صيغة عامة.

مثال (٢ - ٢)

بفرض أن لديك المشروع التالي، والمكون من ستة أنشطة هي أ، ب، جـ، د، هـ، و. وأن لكل نشاط فترة زمنية مقدرة سوف نعبر عنها بالرمز ف كذلك فإن لكل نشاط نقطة بداية ونهاية تسمى حدث. وأن الشبكة تأخذ الشكل التالي حسب العلاقات التتابعية بين الأنشطة:



يعني ذلك أن الوقت اللازم لإتمام النشاط أ هو ف٢١ والنشاط ب هو ف٣١. . . وهكذا. أي أن فـسص هي عبارة عن الوقت المستغرق لنشاط ما يبدأ في الحدث س ويتم في الحدث ص.

دعنا الآن نعرف متغير جديد هو (وص) وهو عبارة عن أول وقت من الممكن أن يتم فيه الحدث ص. وعلى ذلك يكون الهدف الآن هو تقليل minimize

(*) للمزيد عن موضوع البرمجة الخطية، راجع كتاب المؤلف، البرمجة الخطية، المكتب العربي الحديث، الاسكندرية، ١٩٨٦.

أول وقت من الممكن أن يتم فيه المشروع ككل (وهو بالضبط أول وقت من الممكن أن يتم فيه الحدث ٥ في هذا المثال). وذلك في ظل القيود الناتجة عن تعريف $و_{ص}$. أي أن القيود في هذه الحالة يجب أن تضمن أن $ف_{ص}$ تكون على الأقل أكبر من أو تساوي مجموع الفترات على كل المسارات التي تؤدي إلى الحدث ص. فعلى سبيل المثال، بالنسبة للحدث (٤)، فإن القيدين التاليين يضمنا أن وقت هذا الحدث لا يقل عن أطول المسارات الداخلة في الحدث (٤) . . وهذين القيدين هما:

$و_{٤} \geqslant و_{٢} + ف_{٢٤}$

وأيضا $و_{٤} \geqslant و_{٣} + ف_{٣٤}$

ويعني ذلك أن وقت الحدث (٤) سوف يكون هو أكبر المسارين التاليين:

(١) ← (٢) ← (٤)

و (١) ← (٣) ← (٤)

وبنفس المنطق فإنه بالنسبة لكل الشبكة الواردة في المثال تكون صياغتها في شكل نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

دالة الهدف: قلل ت = $و_{٥}$

في ظل القيود

$و_{٢} \geqslant ف_{١٢}$ (١)

$و_{٣} \geqslant ف_{١٣}$ (٢)

$-و_{٢} + و_{٤} \geqslant ف_{٢٤}$ (٣)

$-و_{٣} + و_{٤} \geqslant ف_{٣٤}$ (٤)

$-و_{٣} + و_{٥} \geqslant ف_{٣٥}$ (٥)

$-و_{٤} + و_{٥} \geqslant ف_{٤٥}$ (٦)

وكل $و_{ص} \geqslant$ صفر

أمـا القيدين الأول والثـاني فهما مبـاشرة من الحدثين (٢)، (٣). فالحـدث (٢) لا يسبقه إلا الحدث (١). وطالما أن الوقت الذي يستغـرقه الحـدث دائماً هـو صفر فإن أول وقت حدوث الحدث (٢) يكون هو على الأقل بعد إتمام النشـاط أي بعد وقت النشاط أ وهو $ف_{٢١}$. كذلـك الحال بـالنسبة لأول وقت يمكن أن يحـدث فيه الحدث (٣) فهو على الأقل بعد مرور الفترة $ف_{٣١}$.

كـذلك فـإن القيدين (٣) و (٤) همـا الترجمـة المباشرة للقيـدين الـذين تم استنتاجهم فيما سبق فيما يتعلق بالحدث (٤). ولكن تم إعادة الـترتيب للمتغيرات حتى نصل إلى الصياغة النمطية التي تستلزمها طريقة البرمجة الخطية. ويكـون ذلك كما يلي:

$$و_٤ \geqslant و_٢ + ف_{٢٤}$$

$$و_٤ - و_٢ \geqslant ف_{٢٤}$$

$$\text{ومنها} \quad -و_٢ + و_٤ \geqslant ف_{٢٤} \qquad (٣)$$

كذلك فإن

$$و_٤ \geqslant و_٣ + ف_{٣٤}$$

$$و_٤ - و_٣ \geqslant ف_{٣٤}$$

$$\text{ومنها} \quad -و_٣ + و_٤ \geqslant ف_{٣٤} \qquad (٤)$$

أمـا القيدين الخـامس والسادس فيمكن التـوصل إليهم عنـد مراعـاة شرط الحـدث (٥) من حيث التتابـع. فحيث أن الحدث (٥) يمكن الـوصـول إليـه من مسارين. أما عن طريق الحدث (٣) أو عن طـريق الحدث (٤) فـإن هناك قيـدين لضمان تحقيق أول وقت وهما :

$$و_٥ \geqslant و_٣ + ف_{٣٥}$$

وأيضا

$$و_٥ \geqslant و_٤ + ف_{٤٥}$$

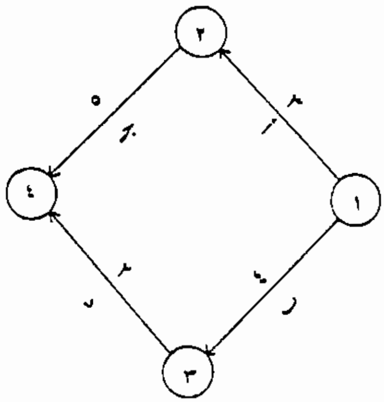
وبشيء من إعادة الترتيب لهذين القيدين يمكن التوصل إلى القيدين (٥)، (٦).

ويتأمل هذه الصياغة التي أمامنا نجد أن القيم الموجودة من الجانب الأيسر من كل القيود (١) إلى (٦) توضح خاصية هامة في تلك الصياغة. وهي أن عدد القيود لابد وأن يساوي عدد الأنشطة. ويرجع ذلك إلى أن القيم الموجودة على اليسار ماهي إلا الوقت اللازم لاتمام الأنشطة جميعها. كذلك فإن إعادة صياغة هذه المشكلة الأصلية حسب الصيغة الثنائية* dual سوف يوضح أن مشكلة الثنائية في هذه الحالة سوف تؤدي إلى الوصول إلى أطول مسار على الشبكة. كذلك فإن الحل الأمثل لمشكلة الثنائية سوف يعطي قيماً مثلى لمتغيرات الثنائية (هي أسعار الظل) سوف توضح تماماً ما إذا كان النشاط حرجاً (له قيمة الوحدة) أو غير حرجاً (له قيمة صفر). وبناءاً على ذلك فإن المسار الحرج يمكن تحديده عن طريق فحص أسعار الظل في الحل الأمثل للمشكلة الأصلية التي قمنا بصياغتها في الفقرات السابقة. وطالما أنه بالنسبة لكل قيد في المشكلة الأصلية سوف يكون هناك متغيراً مناظراً في المشكلة الثنائية فإن ذلك يؤدي في مثالنا إلى أن سعر الظل Shadow Price الخاص بالقيد (١) يوضح ما إذا كان النشاط (١ ، ٢) نشاطاً حرجاً أم لا، كما أن سعر الظل الخاص بالقيد (٢) يوضح ما إذا كان النشاط (١ ، ٣) نشاطاً حرجاً أم لا.. وهكذا.

ولإيضاح هذا المعنى دعنا نأخذ المثال البسيط جداً التالي

(*) للمزيد عن موضوع الثنائية في مشكلة البرمجة الخطية، راجع كتاب المؤلف، البرمجة الخطية، المكتب العربي الحديث، الاسكندرية، ١٩٨٦.

مثال (٢ ـ ٣)



يتضح من هذا المثال أن المسار الحرج هو المسار (١) ← (٢) ← (٤) حيث أنه أطول مسار على الشبكة. وطوله يساوي ٨ أسابيع. كذلك فإن الأنشطة الحرجة هي الأنشطة أ ، جـ. وعلى ذلك فإن الفائض الإجمالي لكل من النشاط أ والنشاط جـ = صفر أما الفائض الاجمالي للنشاط ب فهو ٢ وللنشاط د فهو ٢. كذلك فإنه يمكننا حساب الفائض الحر للأنشطة ب ، د. وهو يساوي صفراً بالنسبة للنشاط ب و ٢ بالنسبة للنشاط د. وبالطبع فإن الفائض الحر للأنشطة الحرجة أ ، جـ يساوي صفر.

والآن سوف نحاول استخدام أسلوب البرمجة الخطية علنا نصل إلى نفس الإجابات. وتكون الخطوة الأولى هي صياغة المشكلة حسب أسلوب البرمجة الخطية على النحو التالي:

قلل ت = و ٤

في ظل القيود

و$_٢$ ≥ ٣

و$_٣$ ≥ ٤

و$_٤$ ≥ و$_٢$ + ٥

و$_٤$ ≥ و$_٣$ + ٢

وبإعادة ترتيب القيود نصل إلى الصيغة المنتظمة التالية

قلل ت = و$_{٤}$

و$_{٢}$ + صفر و$_{٣}$ + صفر و$_{٤}$ ≥ ٣ (١)

صفر و$_{٢}$ + و$_{٣}$ + صفر و$_{٤}$ ≥ ٤ (٢)

−و$_{٢}$ + صفر و$_{٣}$ + و$_{٤}$ ≥ ٥ (٣)

صفر و$_{٢}$ − و$_{٣}$ + و$_{٤}$ ≥ ٢ (٤)

و$_{٢}$ ، و$_{٣}$ ، و$_{٤}$ ≥ صفر

ويمكن تحويل التباينات إلى معادلات عن طريق إضافة متغير عطل يمثل كل قيد على النحو التالي:

قلل ت =

صفر و$_{٢}$ + صفر و$_{٣}$ + و$_{٤}$ + صفر ع$_{١}$ + صفر ع$_{٢}$ + صفر ع$_{٣}$ + صفر ع$_{٤}$

القيود

و$_{٢}$ + صفر و$_{٣}$ + صفر و$_{٤}$ − ع$_{١}$ + صفر ع$_{٢}$ + صفر ع$_{٣}$ + صفر ع$_{٤}$ = ٣

صفر و$_{٢}$ + و$_{٣}$ + صفر و$_{٤}$ + صفر ع$_{١}$ − ع$_{٢}$ + صفر ع$_{٣}$ + صفر ع$_{٤}$ = ٤

−و$_{٢}$ + صفر و$_{٣}$ + و$_{٤}$ + صفر ع$_{١}$ + صفر ع$_{٢}$ − ع$_{٣}$ + صفر ع$_{٤}$ = ٥

صفر و$_{٢}$ − و$_{٣}$ + و$_{٤}$ + صفر ع$_{١}$ + صفر ع$_{٢}$ + صفر ع$_{٣}$ − ع$_{٤}$ = ٢

و$_{٢}$ ، و$_{٣}$ ، و$_{٤}$ ≥ صفر

وقبل أن نبدأ في الحل يجب هنا أن نلاحظ أن عدد القيود هو عدد الأنشطة. وأن القيم الموجودة في القيود على اليسار ما هي إلا قيم الوقت المقدر للأنشطة. فالقيمة ٣ هي الخاصة بالنشاط أ والقيمة ٤ هي الخاصة بالنشاط ب كذلك فإن القيمة ٥ هي الخاصة بالنشاط جـ والقيمة ٢ هي الخاصة بالنشاط الأخير د. كذلك نلاحظ أيضاً في هذه الصياغة أن المتغيرات الجديدة الخاصة بالعطل في كل قيد قد تم طرحها من الجانب الأيمن نظراً لأن صيغة القيود هنا هي ≥ . وحتى

نوفر على نفسنا عملية إضافة المتغيرات الوهمية سوف نحاول خلق حلاً أساسياً ممكناً يحقق شروط جدول السمبلكس من خلال بعض العمليات الرياضية البسيطة. والسبب الذي شجع على ذلك هو أن معظم المعاملات للمتغيرات هي إما الوحدة (السالبة أو الموجبة) أو صفر. وعلى ذلك نبدأ بجدول السمبلكس المبدئي الذي اعتبرنا فيه أن و٢ ، و٣ ، و٤ ، ع٤ (بالضرورة) متغيرات أساسية بينما تعتبر كل من ع١ ، ع٢ ، ع٣ متغيرات غير أساسية قيمتها صفر.

ت			صفر	صفر	١	صفر	صفر	صفر	صفر
ت الوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	و٢	و٣	و٤	ع١	ع٢	ع٣	ع٤
صفر	و٢	٣	١	صفر	صفر	-١	صفر	صفر	صفر
صفر	و٣	٤	صفر	١	صفر	صفر	-١	صفر	صفر
١	و٤	٨	صفر	صفر	١	-١	صفر	-١	صفر
صفر	ع٤	٢	صفر	صفر	صفر	-١	١	-١	١
ل		٨	صفر	صفر	١	-١	صفر	-١	صفر
ت - ل			صفر	صفر	صفر	١	صفر	١	صفر

ملحوظة :

ثم استنتاج المعادلة الخاصة بالصف و٤ عن طريق جمع المعادلة الأولى الخاصة بالمتغير الأساسي و٢ مع المعادلة الثانية في صيغ المعادلات السابقة الخاصة بالمشكلة. أما معادلة الصف ع٤ فقد تم الوصول إليها عن طريق طرح المعادلة الأخيرة من المعادلة الثانية حتى تصبح ع٤ قيمة موجبة كمتغيراً أساسياً.

وحيث أن كل القيم في الصف ت ـ ل في الجدول قيماً صفرية أو موجبة فإن ذلك يكون هو الحل الأمثل. ويلاحظ على هذا الحل ما يلي :

١ ـ أن أقل قيمة للمتغير و٤ يمكن تحقيقها هي ٨ وهي التي تتضح في الجدول في الصف قبل الأخير. وهو بالضبط أقل وقت يلزم لإتمام المشروع وهو طول المسار الحرج كما أوضحنا في الحل العادي لهذا التمرين منذ بدايته.

٢ ـ يمكن أيضاً الاستفادة من هذا الجدول في تحديد الأنشطة الحرجة. ويكون ذلك عن طريق تحديد أسعار الظل لمتغيرات العطل التي تعبر عن كل قيد. (لاحظ أن كل قيد يعني نشاطاً معيناً). وعلى هذا الأساس فإن أسعار الظل لهذه المتغيرات تعبر عن حرجية النشاط. فإذا كان سعر الظل رقماً موجباً (مساوياً للوحدة) فيعني ذلك عدم إمكانية تأخير النشاط، وعلى ذلك فيكون نشاطاً حرجاً. أما إذا كان سعر الظل صفراً فيعني ذلك أن النشاط نشاطاً غير حرجاً. وبتطبيق هذه القاعدة على الجدول نجد إن :

- سعر الظل للمتغير ع١ = ١ ويعني ذلك أن النشاط أ نشاطاً حرجاً (فالمتغير ع١ قد أضيف إلى القيد الأول، والقيد الأول يخص النشاط أ).
- سعر الظل للمتغير ع٢ = صفر ويعني ذلك أن النشاط ب نشاطاً غير حرجا (فالمتغير ع٢ قد أضيف إلى القيد الثاني، والقيد الثاني يخص النشاط ب).
- سعر الظل للمتغير ع٣ = ١ ويعني ذلك أن النشاط جـ نشاطاً حرجاً. (فالمتغير ع٣ قد أضيف إلى القيد الثالث، والقيد الثالث يخص النشاط جـ).
- سعر الظل لمتغير ع٤ = صفر ويعني ذلك أن النشاط د نشاطاً غير حرجاً (فالمتغير ع٤ قد أضيف إلى القيد الرابع، والقيد الرابع يخص النشاط د).

وعلى ذلك فإن الأنشطة الحرجة هي أ، حـ وهذا يتطابق مع الحل بالطريقة العادية أيضا.

٣ ــ يمكن استخدام البيانات الواردة في الجدول في تحديد مقدار الفائض الخاص بكل نشاط، وهو الفائض الحر. فالقيم $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ ، $ع_٤$ تعني مقدار الفائض الحر للأنشطة أ ، ب ، جـ ، د على التوالي. وحيث أن $ع_١$ ، $ع_٢$ ، $ع_٣$ متغيرات غير أساسية لا تظهر في الحل فإن قيمها تساوي صفر. ويعني ذلك أن وقت الفائض الحر للأنشطة أ ، ب ، جـ تساوي الصفر. أما القيمة الموجبة $ع_٤$ = ٢ فإنها تعني أن مقدار الفائض الحر للنشاط يساوي ٢ أسبوع. ويرجع ذلك كما ذكرنا إلى أن $ع_٤$ قد أضيفت إلى القيد الرابع وعلى ذلك فهي تخص النشاط د.

ويهمنا هنا أيضاً الإشارة إلى أن هذه المشكلة يمكن حلها مباشرة عن طريق الصياغة الثنائية والتي تمتاز بقلة عدد القيود. كما أنها تعطي نتائج مباشرة يمكن منها معرفة الأنشطة الحرجة وغير الحرجة. كذلك تعطي مباشرة أطول مسار على الشبكة.

وحتى يمكننا القيام بذلك نبدأ بصياغة نفس المشكلة في شكل الثنائية على النحو التالي:

عظم

$ح = ٣ص_١ + ٤ص_٢ + ٥ص_٣ + ٢ص_٤ + صفر ك_١ + صفر ك_٢ + صفر ك_٣$

القيود

$ص_١ + صفر ص_٢ - ص_٣ + صفر ص_٤ + ك_١ + صفر ك_٢ + صفر ك_٣ = صفر$

$صفر ص_١ + ص_٢ + صفر ص_٣ - ص_٤ + صفر ك_١ + ك_٢ + صفر ك_٣ = صفر$

$صفر ص_١ + صفر ص_٢ + ص_٣ + س_٤ + صفر ك_١ + صفر ك_٢ + ك_٣ = ١$

ويكون جدول الحل المبدئي هو:

ح			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
صفر	ك١	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر	صفر
صفر	ك٢	صفر	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر
صفر	ك٣	١	صفر	صفر	(١)	١	صفر	صفر	١
		صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر

أما الجدول الثاني فهو:

ح			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
صفر	ك١	١	١	صفر	صفر	١	١	صفر	١
صفر	ك٢	صفر	صفر	(١)	صفر	-١	صفر	١	صفر
٥	ص٣	١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	١
		٥	صفر	صفر	٥	٥	صفر	صفر	٥
			٣	٤	صفر	-٣	صفر	صفر	-٥

والجدول التالي هو:

ح			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
صفر	ك١	١	(١)	صفر	صفر	١	١	صفر	١
٤	ص٢	صفر	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر
٥	ص٣	١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	١
		٥	صفر	٤	٥	١	صفر	٤	٥
			٣	صفر	صفر	١	صفر	-٤	-٥

أما الجدول الأخير لمشكلة الصيغة الثنائية فهو:

ح			٣	٤	٥	٢	صفر	صفر	صفر
ح للوحدة	المتغيرات الأساسية	قيم المتغيرات الأساسية	ص١	ص٢	ص٣	ص٤	ك١	ك٢	ك٣
٣	ص١	١	١	صفر	صفر	١	١	صفر	١
٤	ص٢	صفر	صفر	١	صفر	-١	صفر	١	صفر
٥	ص٣	١	صفر	صفر	١	١	صفر	صفر	١
		٨	٣	٤	٥	٤	٣	٤	٨
			صفر	صفر	صفر	-٢	-٣	-٤	-٨

ويتضح من هذا الجدول أن الحل الحالي هو الحل الأمثل. ويمكن استخدام هذا الحل في التعرف على ما يلي:

١ ـ أطول مسار على الشبكة طوله ٨ كما يتضح ذلك في الصف قبل الأخير.

٢ ـ أن قيمة المتغيرات ص١ ، ص٢ ، ص٣ هي بالتمام أسعار الظل التي توصلنا إليها للمتغيرات ع١، ع٢، ع٣ في حل المشكلة الأصلية للسمبلكس. ولذلك فإن هذا الجدول يوضح أن سعر الظل للقيد الأول الأصلي = صفر ويعني ذلك أن النشاط أ نشاطاً حرجاً. وكذلك الحال بالنسبة للنشاط جـ. كذلك فإن سعر الظل للقيد الثاني في الصياغة الأصلية هو صفر وسعر الظل للقيد الرابع في الصياغة الأصلية = ص٤ = صفر وعلى ذلك فإن الأنشطة ب ، د أنشطة غير حرجة.

٣ ـ القيم الخاصة بالمتغيرات الغير أساسية الواردة في الصف الأخير في جدول الحل النهائي لمشكلة الثنائية يمكن منها معرفة القيم الخاصة بالمتغيرات الأصلية الأساسية. ويكون ذلك عن طريق ضربها في (-). وعلى ذلك فإن قيم المتغيرات الأصلية و١ ، و٢ ، و٣ هي ٣ ، ٤ ، ٨ على التوالي. كذلك فإن المتغير الغير أساسي في مشكلة الثنائية ص٤ يعطى قيمة المتغير الأصلي الأساسي ع٤ = ٣.

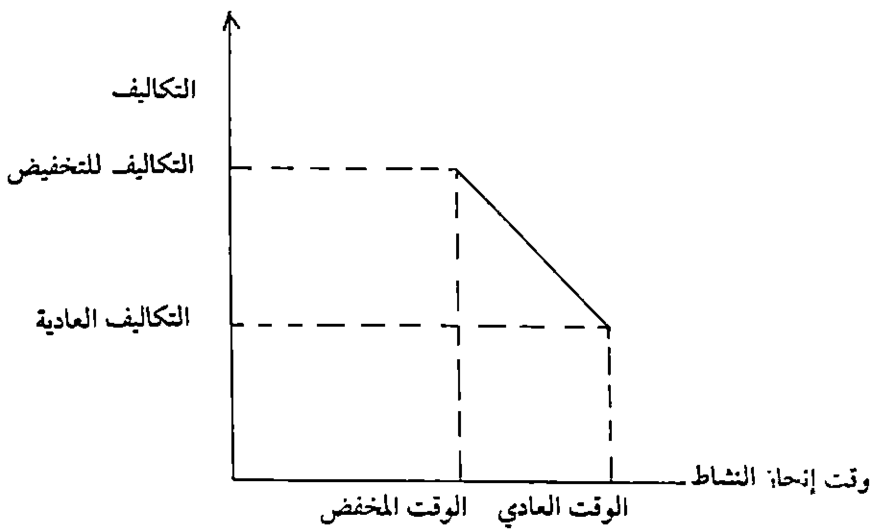
وهكذا فسواءاً عن طريق حل مشكلة البرمجة الخطية الأصلية أو مشكلة الثنائية فإنه يمكننا الوصول إلى نفس النتائج التي توصلنا إليها عن طريق الأسوب انتمليدي للمسار الحرج CPM.

تخفيض وقت اتمام المشروع :

في حالة الحاجة إلي تخفيض وقت اتمام المشروع يجب أن ينصب الاهتمام علي الأنشطة الحرجة . ففي مثالنا السابق إذا قمنا بإضافة موراد عديد إلي القائمين بالنشاط جـ بشكل يمكنهم من اتمام النشاط في ثلاثة أيام لا في أربعة .سوف نجد أن أقل وقت يلزم لاتمام المشروع ما زال هو ١٤ يوما ، ويرجع ذلك إلي أن النشاط جـ ليس نشاطا حرجا . فإضافة الموارد إلي النشاط غير الحرج يعتبر مضيعة للجهد والموارد . أما تقليل الوقت اللازم للنشاط و وهو نشاط حرجا ، بما قدره يوما فسوف يترتب عليه تخفيض وقت اتمام المشروع إلي ١٣ يوما ويعني ذلك أن هذا عملا فعالا له تأثير علي وقت إتمام المشروع .

ويجب أن ندرك أن عملية تخفيض Crash وقت اتمام المشروع ـ من خلال الأنشطة الحرجة ـ هي عملية لها جانب هندسي وآخر اقتصادي ، أما الجانب الهندسي فيتمثل في الإجابة علي مدي امكانية تخفيض الوقت اللازم لانجاز نشاط معين من الناحية الفنية ، فقد يكون الرقم الأصلي المقدر يمثل الحد الأدني اللازم لهذاالنشاط ، فعلي سبيل المثال يجب الانتظار لفترة معينة حتي تصبح الأساسات صلبة بدرجة كافية قبل بدء البناء عليها. بمعني آخر يجب علي المتخصصين الإجابة علي السؤال : هل من الممكن التخفيض ؟ وإذا كانت الإجابة بنعم فماهو أقصي تخفيض ممكن بالنسبة لكل نشاط حرج ؟

أما الجانب الاقتصادي فهو المتمثل في العبء المادي الإضافي الذي يتحمله المشروع الناتج عن عملية التخفيض للنشاط الحرج وبالتالي للمشروع ككل ، فتخفيض الوقت اللازم للنشاط يستلزم موارد اضافية في الغالب تكون تكلفة الحصول عليها أكثر من التكاليف الأصلية . فتشغيل الأفراد ورديات إضافية أو في أيام العطلات يترتب عليه دفع أجور أعلي من الأيام العادية . وتظهر هذه الخاصية الآن في قطاع المقاولات . فإذا رغب صاحب المشروع اتمامه في فترة وجيزة عليه أن يدفع أسعار موارد البناء في السوق الحرةوالتي تزيد بالقطع عن أسعار الحصص التي تخصصها الدولة . ويمكن ايضاح العلاقة بين فترة اتمام النشاط والتكاليف علي النحو التالي في الشكل (٣ ـ ٣) .



يوضح هذا الشكل علي المحور الأفقي مقدار الوقت اللازم لانجاز النشاط وعلي المحور الرأسي مقدار التكاليف اللازمة لانجاز النشاط . وعلي المحور الأفقي يوجد الوقت الأصلي المقدر والذي يطلق عليه عادة الوقت العادي normal Time وكذلك الوقت المنخفض Crashed Time والذي يكون عادة أقل من الوقت العادي . ويمثل هذا الوقت المخفض أقل مدة زمنية لازمة فنية لانجاز النشاط . وبتأمل العلاقة بين مقدار الوقت اللازم للنشاط وتكلفة الأداء نجد أنها علاقة عكسية ، فتخفيض وقت الأداء سوف يترتب عليه زيادة التكاليف من التكاليف العادية normal cost اللازمة للوقت العادي إلي التكاليف المرتفعة Crash cost المصاحبة للوقت المخفض . وقد افترضنا هنا للتبسيط فقط أن العلاقة خطية. أما في الحياة العملية فمن الممكن ألا تكون كذلك .

ومن هذه العلاقة الموضحة في الرسم يمكن التوصل إلي تقدير لكل زيادة مترتبة علي تخفيض وقت أداء المشروع بفترة زمنية واحدة علي أنها تساوي :

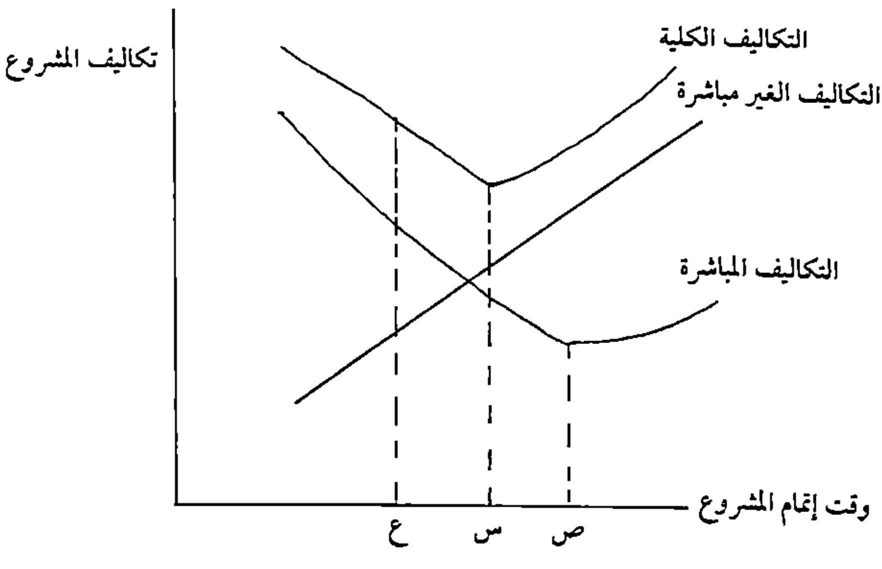
$$\frac{\text{تكلفة الوقت المنخفض - تكلفة الوقت العادي}}{\text{الوقت العادي - الوقت المخفض}}$$

وهي التكلفة الواجب أخذها في الحسبان عند اتخاذ قرار التخفيض كما سنري في مثال قادم .

من ناحية أخري فإن قرار الاسراع باتمام المشروع ككل عن طريق خفض أوقات الأنشطة الحرجة يجب أن يصحبه دراسة للعائد والتكلفة علي مستوي المشروع وليس الأنشطة فقط . فإذا كان العائد المحقق الإضافي المتوقع من الإسراع بالمشروع يزيد علي التكلفة الإضافية فإن قرار الإسراع سوف يكون له مايبرره ماذا وإلا فإن مثل هذا القرار سوف لايكون له مايبرره .

والعلاقة بني التكاليف ووقت اتمام المشروع علي مستوي المشروع ككل يمكن تصويرها علي النحو التالي في (شكل ٣ - ٤) :

شكل (٣ - ٤)



وفي هذا الشكل يظهر منحني التكاليف الغير مباشرة وهو تقريبا خطأ مستقيما ويعبر عن بعض التكاليف الثابتة Overhead التي يتم تحميلها للمشروع علي حسب مدة المشروع . ومثال ذلك مرتبات المهندسين والإداريين واستهلاك العدد والمعدات ، وهي تنخفض مع انخفاض مدة المشروع وتزيد بزيادته . أما المنحني الآخر فهو منحني التكاليف المباشرة والتي ترتفع مع عملية التخفيض ، فهي تكلفة الموارد الإضافية التي نحتاجها أكثر لتخفيض وقت اتمام المشروع . ويلاحظ أن هذا المنحني بعد تاريخ معين وهو ص يبدأ في الارتفاع وقد يعبر ذلك عن غرامات التأخير التي تدفع عن أيام تأخير اتمام المشروع . كما أنها قد تعبر عن احتمال ارتفاع تكلفة المواد اللازمة في حالة التأخير لفترات طويلة. أماالمنحني الثالث فهو منحني التكاليف الكلية والذي يمثل إجمالي التكاليف المباشرة وغير المباشرة لفترات اتمام المشروع المختلفة .

وعلي الرغم من بساطة هذا التحليل ، إلا أنه يمكن استخدامه في دراسة قرار تخفيض وقت اتمام المشروع ، ففي مثالنا هذا إذا رأت الشركة أو الهيئة الاسراع بالمشروع حتي يمكن تحقيق عائدا إضافيا سوف يضيع علي الشركة في حالة اتمام المشروع في الوقت س . فإنه يمكن مقارنة هذا العائد الإضافي إذا تم انجاز المشروع في الوقت ع مثلا مع الزيادة الاجمالية المتوقعة في التكاليف الكلية . وبناءا علي هذه المقارنة يمكن اتخاذ القرار علي أساس اقتصادي .

تعرضنا حتي الآن للأساس النظري لعملة يتخفيض وقت النشاط والمشروع والآن ماهي الخطوات التي تتبع لتحقيق ذلك اجرائيا ؟ الاجابة تكمن في :

١ ـ عمل تقديرات للوقت العادي والمنخفض لكل نشاط .

٢ ـ عمل تقديرات للتكاليف العادية وتكلفة الوقت المخفض لكل نشاط .

٣ ـ تحديد المسار الحرج والأنشطة الحرجة .

٤ ـ ابدء في عملية التخفيض للأنشطة الحرجة مبتدأ بالنشاط الحرج والأقل تكلفة .علي أن يكون هذا التخفيض بوحدة زمنية واحده.

٥ ـ راجع أثر ذلك علي المسار الحرج والميزانية المتاحة .

٦ ـ استمر في الخطوات إلي أن تصل إلي التاريخ المرغوب أو إلي أن تستخدم كل الأموال المتاحة .

وسوف نوضح هذه الخطوات في المثال التالي :

مثال (٣ ـ ٢) :

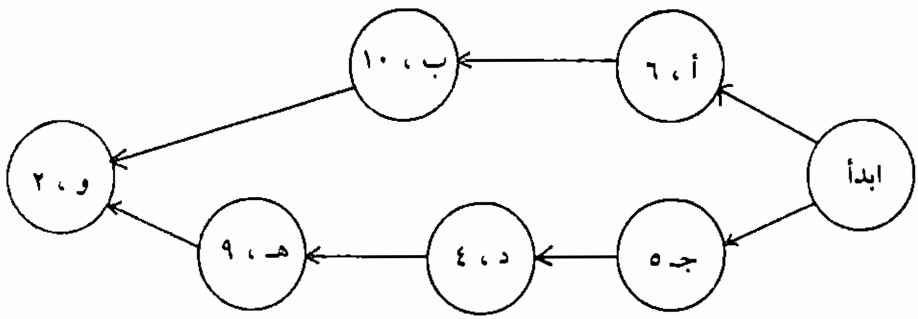
باستخدام البيانات التالية ، وبافتراض أن التكاليف الغير مباشرة لليوم الواحد بالنسبة للمشروع هي ١٠٠٠ جنيه ، ضع خطة مثلي لتخفيض وقت اتمام المشروع والأنشطة .

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الوقت العادي	التكلفة العادية	الوقت المخفض	تكلفة الوقت المخفض
أ	—	٦	٢٠٠٠	٦	٢٠٠٠
ب	أ	١٠	٣٠٠٠	٨	٤٠٠٠
جـ	—	٥	٥٠٠	٤	٨٠٠
د	جـ	٤	٤٠٠	١	٢٥٠٠
هـ	د	٩	٣٠٠	٧	١٥٠٠
و	ب ، هـ	٢	٨٠٠	١	١٦٠٠

الحل

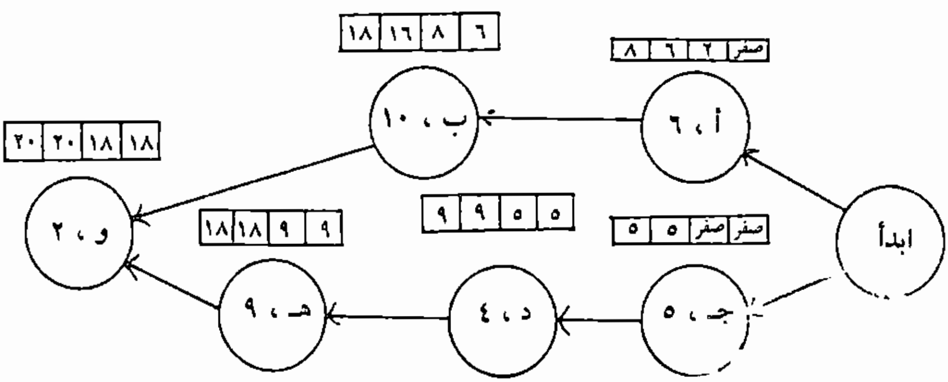
١ ـ تبدأ برسم الشبكة على النحو التالي في شكل (٣ ـ ٥)

شكل (٣ ـ ٥)



٢ ـ نحدد الأنشطة الحرجة والمسار الحرج بتحديد أوقات البدء والاتمام المبكرة والمتأخرة كما في الشكل (٣ ـ ٦)

شكل (٣ ـ ٦)



يتضح من هذا الرسم أن الأنشطة الحرجة هي جـ ، د ، هـ ، و وأن المسار الحرج هو جـ ← د ← هـ ← و بطول قدره ٢٠ يوما .

٣ ـ لتحدد خطة تخفيض الوقت نبدأ بتحديد النشاط الواجب البدء بتخفيض وقت اداؤه ، ويجب أن يكون :

(أ) نشاطا حرجا :

(ب) أن تكون تكلفة التخفيض بيوم واحد أقل ما يمكن ، نظرا لأن تقليل وقت كل نشاط من الأنشطة الحرجة بيوم واحد يؤدي إلي تخفيض وقت اتمام المشروع بيوم واحد ، أى أن كلهم لهم نفس التأثير ، فيجب اختيار النشاط الأقل تكلفة.

(جـ) أن يكون من الممكن فنيا تخفيض وقت هذاالنشاط ، ويعني ذلك أن يكون وقت التخفيض أقل من الوقت العادي وألا يكون قد تم تخفيض هذا النشاط بأقصي كمية من الوقت يمكن تخفيضه بها .

ولتطبيق هذه الشروط يتم تحديد الأنشطة الحرجة وبياناتها في هذه المرحلة كما في الجدول في الصفحة التالية حيث تعبر عن أنشطة حرجة في هذه المرحلة .

ويتضح من ذلك أننا أمام بدائل تخفيض أى من جـ، د ، هـ ، و بيوم واحد . وطالما أن النشاط جـ هو أقل الأنشطة تكلفة فيتم تخفيضه بيوم واحد ويرجع ذلك أساسا إلي أن التكلفة الإضافية وهي ٣٠٠ جنيه أقل من مقدار الوفر المحقق من التخفيض لوقت المشروع ككل وهو ٦٠٠ جنيه ، مقدار التكلفة الغيرمباشرة (الثابتة) لكل يوم تشغيل للمشروع .

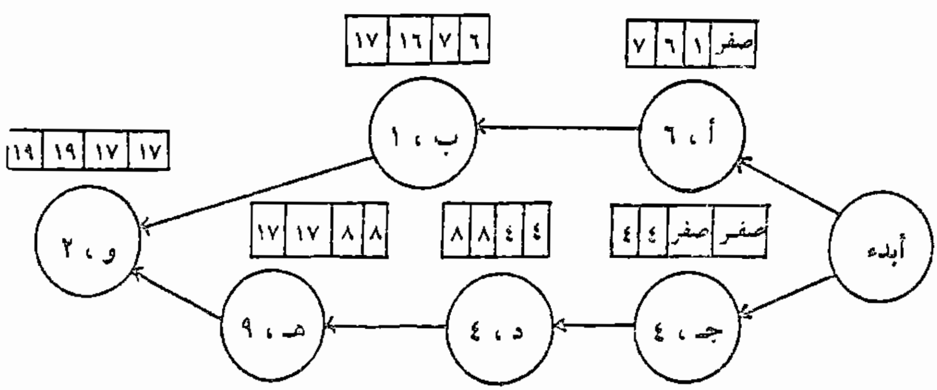
النشاط	الوقت العادي	الوقت المخفض	الفائض Slack	تكلفة التخفيض بيوم واحد (بالجنيه)
أ	٦	٦	٢	لا يمكن فنياً
ب	١٠	٨	٢	(٤٠٠٠ − ٣٠٠٠) ÷ (١٠ − ٨) = ٥٠٠
جـ*	٥	٤	صفر	(٨٠٠ − ٥٠٠) ÷ (٥ − ٤) = ٣٠٠
د*	٤	١	صفر	(٢٥٠٠ − ٤٠٠) ÷ (٤ − ١) = ٧٠٠
هـ*	٩	٧	صفر	(١٥٠٠ − ٣٠٠) ÷ (٩ − ٧) = ٦٠٠
و*	٢	١	صفر	(١٦٠٠ − ٨٠٠) ÷ (٢ − ١) = ٨٠٠

(*) أنشطة حرجة.

ويهمنا هنا أن نوضح أن التخفيض للنشاط الحرج المختار يجب أن يكون دائما بيوم واحد في الخطوة الراحدة ثم يتم بعدها معرفة آثر هذا التخفيض علي المسار الحرج الحالي . فقد يؤدي هذا التخفيض إلي تغيير الأنشطة الحرجة وبالتالي يجب أن يكون التخفيض التالي موجها إلي نشاط آخر .

٤ ـ تحديد أثر التخفيض بيوم علي المسار الحرج ، نعلم أنه بالتأكيد سوف يترتب عل يتخفيض جـ من ٥ إلي ٤. يوم إلي تخفيض وقت اتمام المشروع إلي ١٩ يوم . ويمكننا أيضا في هذا المثال أن نقول بأن المسار الحرج سوف يتبقي كما هو . ويرجع ذلك إلي أن الوقت الزائد الموجود في الأنشطة غير الحرجة Slck يزيد علي الواحد، فهو ٢ في كل من أ، ب. ويمكننا التأكد من ذلك بإعادة حل الشبكة علي النحوالتالي شكل (٣ ـ ٧) والتالي يظهر فيا أن المسار جـ ، د ، هـ ، و مازال هو أطول مسار علي الشبكة .

شكل (٣ ـ ٧)



٥ ـ نقوم بتكرار نفس الخطوات السابقة إلي أن نجد أن تكلفة التخفيض أعلي من التكلفة التي يتم توفيرها حينئذ نتوقف ويكون ذلك كما يلي :

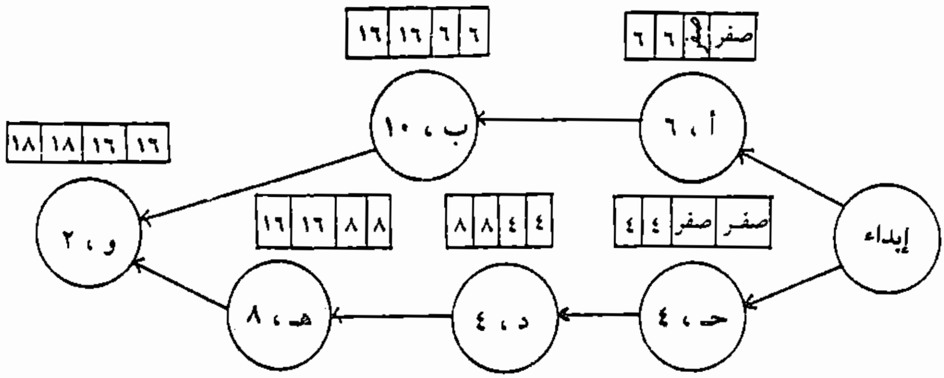
(أ) في هذه المرحلة الأنشطة الحرجة الممكن تخفيضها هي د ، هـ ، و . لاحظ أن جـ لا يمكن تخفيضها عن ٤ أيام . وتكلفة تخفيض د ، هـ ، و بيوم واحد هي ٧٠٠ ، ٦٠٠ ، ٨٠٠ علي التوالي . وطالما أن هـ هي أقل التكاليف فيتم اختيارها نظرا أن ٦٠٠ مازالت أقل من ١٠٠٠ جنيه . وبالتالي فإن القرار هو تخفيض هـ بيوم آخر .

(ب) معرفة آثر هذا التخفيض علي المسار الحرج . نظرا لأن الوقت الزائد Slck لكل من أ ، ب وهي الأنشطة غير الحرجة يساوي الواحد الصحيح فإن تخفيض هـ بيوم واحد سوف يؤدي إلي وجود مسارين حرجين هما :

أ ---> ب ---> و

جـ ---> د ---> هـ ---> و

ويمكن التأكد من ذلك برسم الشبكة مرة أخري .



(جـ) وفي حالة وجود أكثر من مسار حرج يكون أمامنا بدائل في عملية التخفيض وهي :

- تخفيض نشاط مشترك (يقع علي المسارين) بيوم واحد

- تخفيض توليفة مكونة من نشاطين الأول يقع علي المسار الأول والثاني علي المسار الثاني وبتطبيق ذلك تكون البدائل التي أمامناهي .

- تخفيض النشاط و بيوم واحد .. سوف يتكلف ذلك ٨٠٠ جنيه

- تخفيض النشاط أ بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا لأن أ لا يمكن تخفيضه كما أن النشاط جـ قد تم تخفيضه بالحد الأقصي الممكن له وهو يوم واحد .

- تخفيض النشاط أ بيوم واحد ، د بيوم واحد ... وذلك أيضا أمرا غير ممكن .

- تخفيض النشاط ب بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أيضا غير ممكن .

- تخفيض النشاط ب بيوم واحد ، د بيوم واحد ... وذلك أمرا ممكنا وسوف يتكلف ذلك ٥٠٠ + ٧٠٠ = ١٢٠٠ جنيه .

- تخفيض النشاط ب بيوم واحد ، هـ بيوم واحد ... وذلك أمرا ممكنا وتكلفته ٥٠٠ + ٦٠٠ = ١١٠٠ جنيه .

وباستعراض هذه البدائل يتضح أن تخفيض النشاط و بيوم واحد هو البديل الأفضل . حيث أن تكلفته أقل من البدائل الأخري الممكنة كما أنه يتكلف أقل من الوفر المحقق وهو ١٠٠٠ جنيه .

(د) لمعرفة أثر ذلك علي المسار الحرج ، نرجع إلي الشبكة فطالما أن النشاط الذي تم تخفيض وقته هو نشاطا مشتركا علي المسارين الحرجين ـ وهماكل الشبكة ـ فإن المسارين لن يتغيرا . وتكون البدائل الموجودة أمامنا الآن للتخفيض هي:

- تخفيض أ بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.
- تخفيض أ بيوم واحد ، د بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.
- تخفيض أ بيوم واحد ، هـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.

ـ تخفيض أ بيوم واحد ، جـ بيوم واحد ... وذلك أمرا غير ممكنا.

ـ تخفيض ب بيوم واحد، د بيوم واحد.. وذلك يتكلف ١٢٠٠ جنيه .

ـ تخفيض ب بيوم واحد، هـ بيوم واحد.. وذلك يتكلف ١١٠٠ جنيه .

وطالما أن البدائل المتاحة للتخفيض كلها تتكلف أكثر من ١٠٠٠ جنيه وهو مقدار الوفر في التكاليف المحقق من تخفيض وقت النشاط بيوم واحد فإن هذه تكون النقطة التي نتوقف عندها .

ويمكن تلخيص خطة التخفيض المثلي علي النحو التالي :

ـ خفض النشاط جـ بيوم واحد ،أى اجعل مدة التنفيذ ٤ بدلا من٥ يوم
ثم ـ خفض النشاط هـ بيوم واحد ، أى اجعل مدة التنفيذ ٨ بدلا من ٩ يوم .

ثم ـ خفض النشاط و بيوم واحد ، أى اجعل مدة التنفيذ ١ بدلا من ٢ يوم .

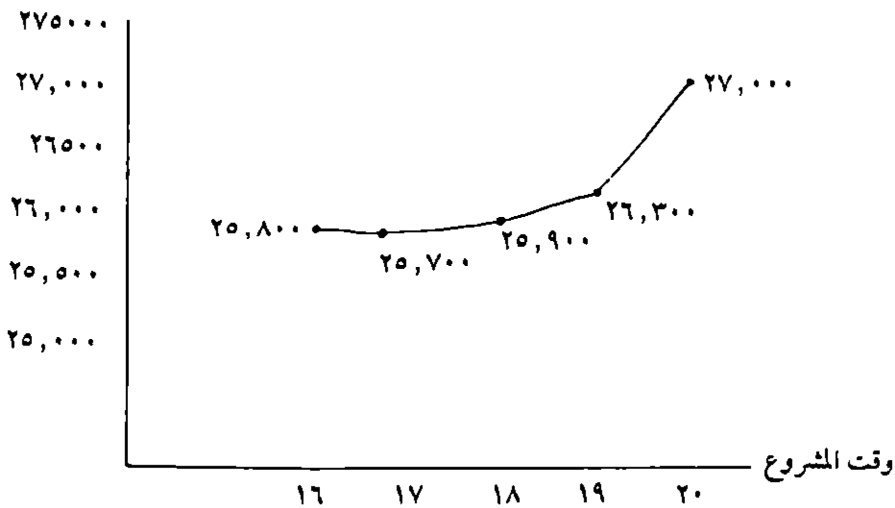
وتكون تكلفة التخفيض الإجمالية = ٣٠٠ + ٦٠٠ + ٨٠٠ = ١٧٠٠ جنيهاوالعائد المحقق من التخفيض هو توفير مامقداره ٣٠٠٠ جنيها .

ويمكننا الآن ايضاح أثر هذا التخفيض تدريجياً علي التكاليف الكلية كما في الجدول التالى :

طول المشروع (بالأيام)	التكاليف المباشرة للأنشطة	التكاليف الغير مباشرة المرتبطة بطول المشروع	التكاليف الكلية
٢٠ قبل التخفيض	٧٠٠٠	١٠٠٠ × ٢٠ = ٢٠٠٠٠	٢٧٠٠٠
١٩ بعد التخفيض الأول (للنشاط حـ بيوم واحد)	٧٠٠٠ + ٣٠٠ = ٧٣٠٠	١٠٠٠ × ١٩ = ١٩٠٠٠	٢٦٣٠٠
١٨ بعد التخفيض الثاني (للنشاط هـ بيوم واحد)	٧٣٠٠ + ٦٠٠ = ٧٩٠٠	١٠٠٠ × ١٨ = ١٨٠٠٠	٢٥٩٠٠
١٧ بعد التخفيض الثالث (للنشاط و بيوم واحد)	٧٩٠٠ + ٨٠٠ = ٨٧٠٠	١٠٠٠ × ١٧ = ١٧٠٠٠	٢٥٧٠٠
١٦ (مضافة للإيضاح فقط)	٨٧٠٠ + ١١٠٠ = ٩٨٠٠	١٠٠٠ × ١٦ = ١٦٠٠٠	٢٥٨٠٠

جدول (٣ ـ ٣)

فإذا افترضنا على سبيل الإيضاح أن عملية التخفيض إلى ١٦ يوم عن طريق أفضل البدائل المتاحة الآن (مع تجاهل مقدار التكاليف الغير مباشرة لليوم الواحد) فإننا يجب أن نخفض الأنشطة ب ، هـ كل بيوم واحد وسوف يترتب على ذلك زيادة في التكاليف المباشرة قدرها ١١٠٠ جنيه ويكون البيان الخاص بهذه الحالة كما هو موضح في آخر الجدول السابق. والذي يتضح منه أن هذا القرار سوف لا يحقق أقل التكاليف الممكنة. فبعد القرار الذي توقفنا عنده وهو التخفيض حتى ١٧ يوم تبدأ التكاليف في الزيادة. ولذلك فإن أقل تكاليف ممكنة هي عند ١٧ يوم كما يتضح من ذلك الشكل البياني التالي :



مثال (٣ ـ ٢) : (حالة الميزانية المحددة للتخفيض)

فيما يلي البيانات الخاصة بوقت وتكلفة إنجاز الأنشطة اللازمة لأحد المشروعات :

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الوقت العادي (يوم)	التكلفة العادية (جنيه)	الوقت المخفض (يوم)	ت. الوقت المخفض (جنيه)
أ	ــ	٢	٦	١	١٠
ب	أ	٥	٩	٢	١٨
جـ	أ	٤	٦	٣	٨
د	ب ، ج	٣	٥	١	٩

والمطلوب:

١ ــ تحديد أقل وقت يلزم لإتمام المشروع وتكلفة الإنجاز.

٢ ــ بفرض أن هناك ميزانية إضافية للمشروع قدرها ١١ جنيه. ضع خطة لتوزيع هذه الميزانية بين الأنشطة حتى تصل إلى أقل وقت انجاز بأقل تكلفة ممكنة.

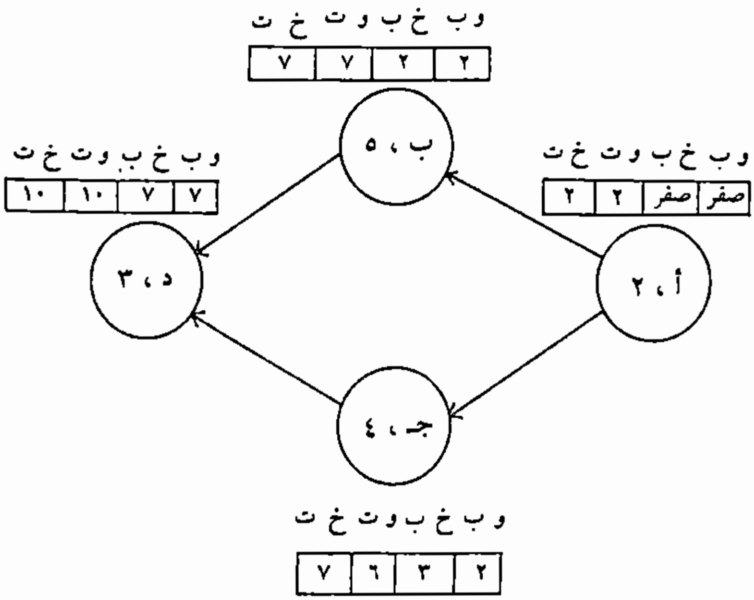
الحل: نبدأ برسم الشبكة كما في الشكل (٣ ـ ٨)

١ ــ أقل وقت يلزم لإتمام المشروع هو ١٠ أيام.
وتكلفة الإنجاز العادية هي ٦ + ٩ + ٦ + ٥ = ٢٦ يوماً.

٢ ــ لعمل خطة لتخفيض وقت الأنشطة، يجب تحديد الأنشطة الحرجة وتكلفة تخفيض كل نشاط بيوم واحد.

أ ــ الأنشطة الحرجة الآن هي أ ، ب ، د كما في الرسم.
ب ــ لتحديد تكلفة تخفيض كل نشاط بيوم واحد نقوم بتطبيق المعادلة

$$\text{تكلفة التخفيض بيوم} = \frac{\text{ت. الوقت المخفض} - \text{ت. الوقت العادي}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المخفض}}$$



شكل (٣ ـ ٨)

على كل نشاط كما في الجدول التالي:

النشاط	التخفيض الممكن	تكلفة التخفيض بيوم واحد
أ	١	(١٠ - ٦) ÷ (٢ - ١) = ٤ جنيه
ب	٣	(١٨ - ٩) ÷ (٥ - ٢) = ٣ جنيه
جـ	١	(٨ - ٦) ÷ (٤ - ٣) = ٢ جنيه
د	٢	(٩ - ٥) ÷ (٣ - ١) = ٢ جنيه

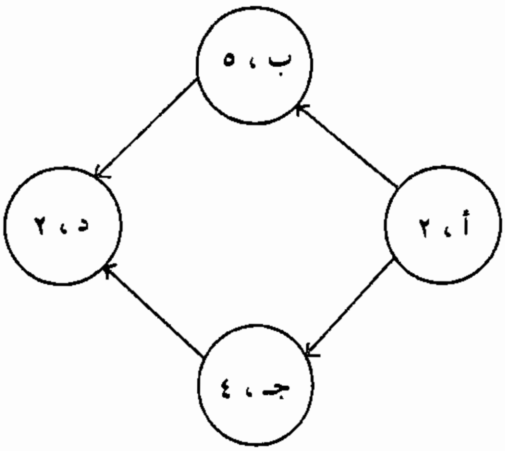
التخفيض الأول:

يمكننا الآن أن نختار النشاط الذي نبدأ بتخفيضه. ويجب أن يكون النشاط المختار:

ـ نشاطاً حرجاً. . وفي هذه الحالة إما أ أو ب أو جـ.
ـ أن يكون من الممكن تخفيضه. . وفي هذه الحالة يمكن تخفيض كل منهم حسب البيانات المتاحة. ولذلك فأمامنا البدائل أ أو ب أو جـ كما هي.
ـ أن تكون تكلفة التخفيض بيوم واحد للنشاط المختار هي أقل التكاليف من بين كل البدائل المتاحة. والآن بمقارنة تكلفة النشاط أ = ٤ ، ت. النشاط ب = ٣ ، ت. النشاط د = ٢ نلاحظ أن النشاط د هو الذي يمثل أقل تكلفة.
ـ إن تسمح الميزانية بعمل هذا التخفيض. . وطالما أننا في أول الميزانية وأن المتاح وهو ١١ جنيه أكبر من ٢ جنيه فإننا يمكن أن نقوم بالتخفيض.

والقرار الأول هو:

خفض وقت إنجاز النشاط د بوحدة زمنية واحدة. ولنرى الآن أثر ذلك على المسار الحرج الحالي كما في الشكل (٣ ـ ٩).



شكل (٣ ـ ٩)

بمجرد النظر نجد أن المسار الحالي سوف يظل كما هو. ويرجع ذلك إلى أن النشاط المخفض هو نشاط مشترك يقع على كل المسارات المحتملة. ويعني ذلك أن

طول المسار أ ← ب ← د سوف يساوي ٩ بينما المسار أ ← جـ ← د سوف يصبح ٨. وبالتالي فإن المسار الحرج سوف لا يتغير.

وطالما أنه مازالت هناك ميزانية متاحة (١١ - ٢) = ٩ فإننا سوف نفكر في التخفيض التالي:

التخفيض الثاني:

المسار الحرج الحالي هو أ ← ب ← د
وبالتالي فإن الأنشطة الحرجة التي يمكن تخفيضها هي

أ بيوم واحد
ب بثلاثة أيام
د بيوم واحد آخر بعد تخفيضه بيوم واحد فيما سبق.

وبمقارنة التكلفة المترتبة على تخفيض كل منهم بيوم واحد نجد أن د مازال هو الأقل تكلفة ولذلك.

فالقراز الثاني هو :

تخفيض د بيوم واحد. ولنرى تأثير ذلك على المسار الحرج الحالي.
لنفس الأسباب التي تم ذكرها في التخفيض الأول نجد أن المسار الحرج سوف يظل كما هو والأنشطة الحرجة هي أ ← ب ← د وطول المسار الحرج الآن هو ٨ أيام.

وطالما أن هناك ميزانية متاحة (٩ - ٢) = ٧ فإننا سوف نفكر في التخفيض التالي:

التخفيض الثالث:

المسار الحرج الحالي هو أ ← ب ← د

وبالتالي فإن الأنشطة الحرجة التي يمكن تخفيضها الآن هي

أ بيوم واحد

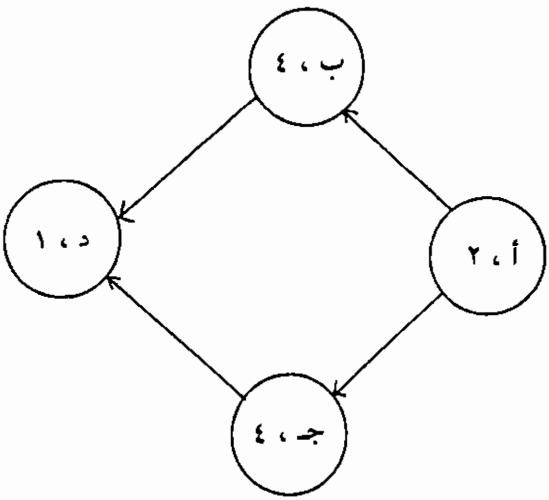
ب بثلاثة أيام

د لا يمكن تخفيضه أكثر مما سبق.

وبمقارنة التكلفة المترتبة على تخفيض كل من أ ، ب بيوم واحد نجد أن أقل تكلفة من أ حسب الجدول السابق. ولذلك. .

فالقرار الثالث هو:

تخفيض ب بيوم واحد ولنرى تأثير ذلك على المسار الحرج الحالي كما في الشكل (٣ ـ ١٠).



الشكل (٣ ـ ١٠)

بتأمل هذه الشبكة نجد أن لدينا الآن مساربن متساويين في الطول هما أ ← ب ← د و أ ← جـ ← د وطول كل منهم ٧ أيام. وهذه هي حالة وجود أكثر من مسار حرج.

وبتأمل الميزانية المتاحة الآن (٧ ـ ٣) = ٤ جنيهات فإننا سوف نفكر في التخفيض التالي:

التخفيض الرابع:

المسار الأول الحرج هو أ ← ب ← د

المسار الثاني الحرج هو أ ← جـ ← د

وطالما أن الحالة الآن هي وجود أكثر من مسار فأمامنا أكثر من بديل:

١ ـ تخفيض نشاط مشترك يقع على نفس المسارين. وبهذه الطريقة يمكن تقليل المسارين معاً عن طريق تخفيض نشاط واحد. وفي هذه الحالة لدينا بدائل:

- تخفيض النشاط أ بيوم واحد وتكلفة ذلك ٤ جنيهات.
- تخفيض النشاط د بيوم واحد وذلك أمر غير ممكن لأننا قد خفضنا د بيومين فيما سبق.

٢ ـ تخفيض نشاطين معاً بنفس القيمة بحيث يقع كل منهم على مساراً مختلفاً. وفي هذه الحالة يكون أمامنا بديل آخر وهو تخفيض ب بيوم واحد و جـ بيوم واحد. وسوف يتكلف ذلك ٣ + ٢ = ٥ جنيهات.

وبمقارنة هذه البدائل جميعها نجد أن البديل الممكن والأقل تكلفة هو تخفيض أ بيوم واحد وذلك يعني أننا سوف يكون لدينا مسارين حرجين هما:

أ ← ب ← د

أ ← جـ ← د

وطول كل منهم = ١ + ٤ + ١ = ٦ أيام

وحيث أن الميزانية المتبقية الآن = ٤ - ٤ = صفر فإن ذلك يعني أنه لا يمكن عمل أي تخفيض آخر. ويمكن تلخيص القرارات كما يلي:

١ ــ خفض د بيومين ، والتكلفة = ٤ جنيهات
٢ ــ خفض ب بيوم واحد ، والتكلفة = ٣ جنيهات
٣ ــ خفض أ بيوم واحد ، والتكلفة = ٤ جنيهات

وذلك بإجمالي تكلفة ١١ جنيهاً، ويكون وقت إتمام المشروع المخفض = ٦ أيام. وفي حدود الميزانية المتاحة لايمكن عمل تخفيض أكثر من ذلك.

استخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة تخفيض وقت إتمام المشروع*

على الرغم من أنه من الممكن استخدام الأسلوب التقليدي الذي أوضحناه في الأجزاء السابقة في عملية التخفيض، إلا أنه من الواضح أن ذلك يستلزم جهداً حسابياً كبيراً في حالة كبر حجم الشبكة وتعدد المسارات المختلفة عليها. ولذلك قد يكون من المفيد في حالات كثيرة الإعتماد على أسلوب رياضي يضمن الوصول مباشرة إلى خطة التخفيض المثلى. وأحد هذه الأساليب أسلوب البرمجة الخطية. وكما أوضحنا في الفصل الثاني من هذا الكتاب أنه لصياغة مشكلة المسار الحرج في شكل برمجة خطية يجب أن يتم تحديد أحداث معينة يبدأ منها أو ينتهي عندها كل نشاط. أي أن النشاط يتم تمثيله على السهم وليس داخل الدائرة. وفي حالة التخفيض يجب أن نحدد المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها في نموذج البرمجة الخطية على النحو التالي:

ضل = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط ل، حيث ل = أ، ب، جـ، . . .، آخر الأنشطة.

ضل = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط ل، حيث ل = أ، ب، جـ، . . .، آخر الأنشطة.

---

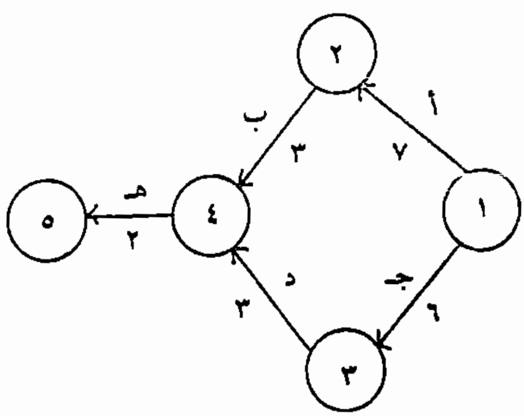
* Anderson, D.R; Dennis J. Sweeney and Thomas A. Williams, **An Introduction to Management Science, Quantitative Approaches to Decision Making, Second Edition**, N. Y., N.Y.: West Publishing company, 1979.

مثال (٣ - ٣)

إذا كانت لدينا البيانات التالية عن أحد المشروعات الواجب تنفيذها فإننا يمكننا ترجمة الأنشطة إلى أحداث بداية وإتمام وتصويرها على النحو التالي:

النشاط	النشاط السابق مباشرة	الوقت العادي (باليوم)	التكاليف العادية (بالجنيه)	الوقت المخفض (باليوم)	تكاليف الوقت المخفض (بالجنيه)
أ	—	٧	٥٠٠	٤	٨٠٠
ب	أ	٣	٢٠٠	٢	٣٥٠
جـ	—	٦	٥٠٠	٤	٩٠٠
د	جـ	٣	٢٠٠	١	٥٠٠
هـ	ب ، جـ	٢	٣٠٠	١	٥٥٠
			١٧٠٠		٣١٠٠

فإننا يمكننا ترجمة الأنشطة إلى الأحداث بداية وإتمام وتصويرها على النحو التالي :



شكل (٣ - ١١)

وعلى ذلك فإن المتغيرات الواجب اتخاذ قرار بشأنها بالنسبة لهـذه الحالة هي :

$س_ك$ = اللحظة التي يحدث فيها الحدث ك

حيث أن ك = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥

وعلى ذلك فإن :

$س_١$ = لحظة البدء للمشروع ككل

$س_٢$ = لحظة إتمام النشاط أ وبدء النشاط ب

$س_٣$ = لحظة إتمام النشاط جـ وبدء النشاط د

$س_٤$ = لحظة إتمام الأنشطة ب ، د وبدء النشاط هـ

$س_٥$ = لحظة إتمام المشروع ككل

$ض_ل$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط

حيث أن ل = أ، ب، جـ، د، هـ

وعلى ذلك فإن :

$ض_أ$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط أ

$ض_ب$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط ب

$ض_{جـ}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط حـ

$ض_د$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط د

$ض_{هـ}$ = مقدار الوقت الذي يخفض به النشاط هـ

أما دالة الهدف فيكون التفكير فيها على أساس أن لدينا إجمالي تكلفة الوقت العادي للمشروع وهي ١٧٠٠ جنيه، وهي تكلفة إتمام المشروع قبل التخفيض، والتي سوف نطلق عليها التكلفة العادية. ونتيجة لعملية التخفيض فإننا سوف نتحمل تكلفة إضافية يطلق عليها تكلفة التخفيض. لذلك فإن تخفيض التكاليف الكلية للمشروع (العادية + تكلفة التخفيض) إلى أقل حد ممكن يكون عن طريق تخفيض التكاليف الإضافية إلى أقل حد ممكن. ولذلك فإن دالة الهدف يمكن

صياغتها كما يلي :

قلل ت = مجـ عر ضر

على أساس أن عر = التكلفة الإضافية الناتجة عن تخفيض النشاط ل بوحدة زمنية واحدة.

ولتحديد عر لكل الأنشطة نقوم بتطبيق المعادلة التي ذكرناها سابقاً لكل الأنشطة، وهي :

$$\text{ع}_\text{ر} = \frac{\text{ت الوقت المخفض} - \text{ت الوقت العادي}}{\text{الوقت العادي} - \text{الوقت المخفض}}$$

والتي سوف تؤدي إلى الجدول التالي والذي يظهر أيضاً أقصى وقت ممكن تخفيض النشاط به.

النشاط	أقصى تخفيض ممكن (باليوم)	تكلفة التخفيض بيوم واحد (بالجنيه)
أ	٣	١٠٠
ب	١	١٥٠
جـ	٢	٢٠٠
د	٢	١٥٠
هـ	١	٢٥٠

ولذلك فإن دالة الهدف تكون :

قلل تكلفـة التخفـيض = ت = ١٠٠ ض$_{ب}$ + ١٥٠ ض$_{جـ}$ + ٢٠٠ ض$_{هـ}$
+ ١٥٠ ض$_{د}$ + ٢٥٠ ض$_{و}$

أما القيود في هذا النموذج فتستلزم مراعاة الشبكة في التتابع، كذلـك وضع قيـود تعبر عن أقـل وقت يمكن أن يخفض كل نشـاط إليه، ومـراعاة مـوعـد إتمـام المشروع إن وجـد. ومن بين هـذه القيـود نجـد أن أصعبهـا هي تلك القيـود التي تصف شكـل التتابـع في الشبكة. وهـذا النوع من القيود يقوم عـلى شروط ثلاث أساسية كما أوضحنا من قبل:

١ ــ إن اللحـظة التي يحدث فيهـا الحدث ك يجب أن تكـون أكـبر من أو مسـاويـة للحظة إتمام كافة الأنشطة التي تؤدي إلى هذا الحدث.
٢ ــ إن وقت بدء النشاط يكـون مساويـاً للحظة التي يحـدث فيها الحـدث السابق عليه مباشرة.
٣ ــ إن الوقت المستغرق لإنجاز النشاط يكون مساوياً للوقت العادي مطروحاً منه وقت التخفيض.

فباستخدام صفر كلحظة بدء للمشروع ككل، وبالتالي للتعبـير عن اللحظة التي يحدث فيها الحدث (أ)، أي أن على أسـاس أن س$_{١}$ = صفر يمكننـا أن نخلق مجموعة من القيود على النحو التالي:

قيد الحدث ٢

س$_{٢}$ $\geqslant$ (٧ − ض$_{أ}$) + صفر

على أساس أن س$_{٢}$ = لحظة حدوث الحدث ٢

، (٧ − ض$_{أ}$) هي عبارة عن الوقت الفعـلي الذي يتم فيـه إنجاز النشـاط أ بعد تخفيضه بوقت قدره ض$_{أ}$.

، صفر هي عبارة عن الوقت الذي يستغرقه الحدث س$_{١}$

ويمكن إعادة صياغة هذا القيد كما يلي

$$س_{٢} + ض_{أ} \leqslant ٧ \qquad (١)$$

قيد الحدث ٣

$$س_{٣} \leqslant (٦ - ض_{جـ}) + صفر$$

ومنها

$$س_{٣} + ض_{جـ} \leqslant ٦ \qquad (٢)$$

قيد الحدث ٤

طالما أن هناك نشاطين يدخلون إلى الحدث (٤) فإننا يكون لدينا قيدين هما

$$س_{٤} \leqslant (٣ - ض_{ب}) + س_{٢}$$

$$س_{٤} \leqslant (٣ - ض_{د}) + س_{٣}$$

وبإعادة الصياغة نجد أن لدينا القيدين

$$-س_{٢} + س_{٤} + ض_{ب} \leqslant ٣ \qquad (٣)$$

$$-س_{٣} + س_{٤} + ض_{د} \leqslant ٣ \qquad (٤)$$

قيد الحدث ٥

$$س_{٥} \leqslant (٢ - ض_{هـ}) + س_{٤}$$

ومنها

$$س_{٤} + س_{٥} + ض_{هـ} \leqslant ٢ \qquad (٥)$$

ولذلك يكون لدينا القيود (١)، (٢)، (٣)، (٤)، (٥) لوصف قيود الشبكة.

أما النوع الثاني من القيود فهي القيود الخاصة بأقصى تخفيض ممكن في كل نشاط والتي يمكن صياغتها على النحو التالي:

$ض_ا \leqslant ٣$ (٦)

$ض_ب \leqslant ١$ (٧)

$ض_ﺟ \leqslant ٢$ (٨)

$ض_د \leqslant ٢$ (٩)

$ض_ﻫ \leqslant ١$ (١٠)

أما النوع الثالث والأخير فهو قيد وقت إتمام المشروع المرغوب. فبتأمل الشبكة نجد أن أقل وقت يلزم لإتمام المشروع قبل القيام بعملية التخفيض (أي على أساس الوقت العادي) هو ١٢ يوم. ولذلك قد يكون من المطلوب تخفيض هذا الرقم إلى عشرة أيام. ويمكن التعبير عن ذلك في شكل القيد الأخير التالي

$س_٥ \leqslant ١٠$ (١١)

أما قيود عدم السالبية فهي

$س_١ ، س_٢ ، س_٣ ، س_٤ ، س_٥ \geqslant$ صفر

$ض_ا ، ض_ب ، ض_ﺟ ، ض_د ، ض_ﻫ \geqslant$ صفر

ويمكن استخدام أسلوب السمبلكس في حل هذه المشكلة. وسوف يؤدي هذا الأسلوب إلى الحل الأمثل التالي:

$س_٢ = ٥$ $ض_ا = ٢$

$س_٣ = ٦$ $ض_ب =$ صفر

$س_٤ = ٨$ $ض_ﺟ =$ صفر

$س_٥ = ١٠$ $ض_د = ١$

$ض_ﻫ =$ صفر

وذلك على أساس أن $س_1$ = صفر

وسوف يؤدي هذا الحل الأمثل إلى تكلفة قدرها ٣٥٠ جنيه تعبر عن التكلفة الإضافية.

ويعني هذا الحل أن النشاط أ يجب أن يخفض بمقدار يومين وسوف يتكلف ذلك ٢٠٠ جنيه، كما أن النشاط د يجب أن يخفض بيوم واحد وسوف يتكلف ذلك ١٥٠ جنيه حتى يمكننا أن ننهي المشروع في موعده المرغوب وهو عشرة أيام. وبسبب هذا التخفيض سوف ينخفض وقت إتمام النشاط أ من ٧ إلى ٥ أيام كما أن وقت النشاط د سوف ينخفض من ٣ إلى ٢ يوم. وسوف تكون تكلفة إتمام المشروع الكلية بعد التخفيض = ١٧٠٠ + ٣٥٠ = ٢٠٥٠ جنيه.

وحتى يمكن التوصل إلى الجدول الجديد لتنفيذ الأنشطة نقوم بعمل تقديرات لوقت البدء ووقت الإتمام لكل نشاط بناءاً على الوقت المخفض الجديد لكل من الأنشطة أ، د. وسوف يؤدي ذلك إلى النتائج التالية:

النشاط	الوقت بعد التخفيض (بالأيام)	وقت البدء المبكر	وقت البدء المتأخر	وقت الإتمام البكر	وقت الإتمام المتأخر	وقت الفائض
أ	٥	صفر	صفر	٥	٥	صفر
ب	٣	٥	٥	٨	٨	صفر
حـ	٦	صفر	صفر	٦	٦	صفر
د	٢	٦	٦	٨	٨	صفر
هـ	٢	٨	٨	١٠	١٠	صفر

ويلاحظ هنا أن كل الأنشطة حسب هذا الجدول الأخير أنشطة حرجة. كذلك فإنه يجب أن ننوه هنا إلى أن إعادة حل ذات المشكلة في ظل تواريخ إتمام

مرغوبة مختلفة (حسب القيد ١١) يمكن أن يوضح للمدير ما إذا كان هذا الضغط ممكن أم لا Feasible. كذلك فإنه يوضح التكاليف المترتبة على كل تاريخ مرغوب. ونظراً لصعوبة القيام بعمل هذه الخطوات يدوياً في المشاكل الكبيرة نسبياً، فإن هناك برامج كومبيوتر جاهزة لعمل هذه الخطوات.

وأخيراً يجب أن نوضح أن هناك مداخل أخرى في استخدام البرمجة الخطية في حل مشكلة التخفيض. فقد لايكون الهدف هو تحقيق أفضل تخفيض عن طريق تخصيص موارد جديدة للأنشطة الحرجة بقصد تقليل وقتها. ولكن قد يكون عن طريق أخذ موارد من الأنشطة الغير حرجة وتخصيصها للأنشطة الحرجة، وذلك بشكل لا يجعل هذه الأنشطة الغير حرجة أنشطة حرجة. وعلى ذلك فإن أولويات الأخذ من الموارد يكون هو النشاط غير الحرج صاحب أكبر قيمة في خانة تكلفة ضغط النشاط بوحدة زمنية واحدة. فذلك يعني أن ذلك هو أفضل وفر ممكن. وبالطبع يترتب على هذا الإجراء تخفيض الوقت الذي يستغرقه أداء النشاط غير الحرج دون أن يأخر ذلك المشروع ككل ولقد قام كل من Kelley and Fulkerson(١٤) بتقديم نموذج للبرمجة الخطية يقضي بعملية التحويل هذه بين الموارد. ويهدف إلى تقليل تكاليف المشروع ككل إلى أقل حد ممكن. وكانت نتيجة هذا النموذج هو تحديد تاريخ بدء وإتمام بالنسبة لكل نشاط والوقت الأمثل (في حدود القيود) الذي يجب أن يستغرقه.

الفصل الخامس

أسلوب تقييم ومراجعة البرنامج

Program Evaluation and Review Technique (PERT)

* مقدمـــة
* وقت إنجاز النشاط
* إستخدام الأسلوب
* حالة وجود أكثر من مسار حرج لكل منها تبايناً مختلفاً
* حالة المسار القريب من الحرج ذو التباين الأعلي
* الفروض الأساسية

أسلوب تقييم ومراجعة البرنامج

Program Evaluation and Review Technique (PERT)

في ذات الـوقت الذي ظهـر فيه أسلوب المسـار الحرج CPM، كـانت هناك مجموعة أخرى تعمل بشكـل مستقل للوصـول إلى أسلوب مشابـه أطلق عليه فيـما بعد بأسلوب تقييم ومراجعة البرنامج، والذي يعرف بالاختصار PERT(*).

فقـد تم تقديم هـذا الأسلوب في عام ١٩٥٨ بـواسـطة Hamilton, Allen, Booz (وهي إحدى الشركات المتخصصة في تقديم الاستشارات الإدارية) وذلـك بالإشتراك مع مكتب المشروعات الخاصة بالبحرية الأمريكيـة. كما شـارك أيضاً في هذه الأبحاث قسم الصـواريخ بشركـة لوكهيـد Lockheed (كبرى شركـات تنفيذ أعمال وزارة الدفاع الأمريكية).

وقـد كان الهـدف الأساسي من هـذا الأسلوب هو تصميم طـريقـة يتم بهـا تخطيط مشروع إنتاج الصاروخ Polaris بشكل يمكن من أحكام الرقابة على التنفيذ

(*) على الرغم من أن الاختصار PERT في كثير من الكتابات وفي العمـل الأصلي لمجمـوعة العمـل التي توصلت إلى الأسلوب هو اختصار التسـمية Program Evaluation and Review Technique، إلا أن هناك بعض الكتاب القلائل الـذين استخدمـوا نفس الاختصار PERT للدلالـة على تسـميـة أشمل للأسلوب وهي Performance Evaluation and Review Technique راجـع في ذلـك عـلى سبيــل المثال: Budnick, and Mojene and Vollmann, 1977. pp. 534-535.

حتى يتم إنجاز المشروع في موعده المحدد. ويمكن أن ندرك أهمية مثل هذا الأسلوب حينما نعلم أنه قد استخدم في جدولة عمل حوالي ٣٠٠٠ جهة خارجية مستقلة، اشتركت جميعها في هذا المشروع. وأوضحت نتائج التطبيق أن استخدام أسلوب PERT في هذا المشروع قد أدى إلى تخفيض فترة إتمام المشروع المقدرة أصلا بواسطة المهندسين بحوالي عامين كاملين فقد تم إنجاز هذا المشروع في أربعة سنوات بعد أنه كان التقدير المبدئي هو ستة سنوات.

ونظراً للنجاح الكبير في استخدام هذا الأسلوب، فقد ذاع استخدامه في كثير من المشروعات المدنية والعسكرية. حتى أن أسلوب PERT قد أصبح واجب الاستخدام من قبل جميع المقاولين الذين يتعاملون مع وزارة الدفاع الأمريكية.

وكما أوضعنا من قبل فإن هناك بعض الاختلافات الطفيفة بين كل من أسلوبي CPM, PERT. ولعل أهم هذه الاختلافات هي قيمة الوقت المقدر لكل نشاط. وقبل أن نتناول هذه النقطة بالتفصيل، يهمنا هنا أن نشير إلى أن كلاً من الأسلوبين يتشابهان في نوع التحليل الرئيسي الذي أوردناه في الفصول السابقة. ويعني ذلك أن الأسلوب الذي قدمناه عند عرض كيفية تحديد المسار الحرج والأنشطة الحرجة والوقت الفائض يمكن استخدامه كلية في حالة أسلوب PERT. فيمكن تحديد أول وقت بدء ممكن وآخر وقت بدء مسموح به، وكذلك أول وقت إتمام ممكن وآخر وقت إتمام مسموح به بالنسبة لكل نشاط عند استخدام PERT. ولكن الفارق الوحيد يكون هو مدى دلالة هذه الأرقام من حيث إمكانية اتمام المشروع في تاريخ محدد. وسوف نرى ذلك تفصيلاً فيما بعد.

بالإضافة إلى ذلك فإنه من الممكن تطبيق فكرة تخفيض وقت إتمام المشروع Crashing، والتي أوضحناها في الفصل السابق، عند استخدام أسلوب PERT. فعلى الرغم من أن فكرة التخفيض هذه استخدمت أصلاً كجزء من أسلوب CPM

إلا أن استخدام الكومبيوتر في حل مشاكل جدولة المشروع باستخدام أي من PERT و CPM جعل من الممكن تطبيق نفس الفكرة في حالة PERT. ويهمنا هنا أن نضيف أحد التحفظات الأساسية والهامة. فعند استخدام فكرة التخفيض، يجب أن يؤخذ في الحسبان احتمال أن يكون ضغط وقت أحد الأنشطة الحرجة غير مؤثر بسبب أن أحد المسارات الأخرى ـ رغم أنه غير حرج ـ قد يؤدي إلى التأخير. ويرجع ذلك أساساً في ظل أسلوب PERT إلى أن تباين هذا المسار الغير حرج قد يكون أعلى من تباين المسار الحرج ذاته.

والآن نعود إلى الفارق الأساسي بين كل من CPM، PERT. . وهو مقدار الوقت المقدر للنشاط.

وقت إنجاز النشاط

كثيراً ما يطلق على أسلوب CPM أنه أسلوب تقريري deterministic بينما يوصف أسلوب PERT بأنه أسلوب احتمالي Probabilistic. وترجع هذه التسمية أساساً إلى كيفية تحديد الوقت اللازم لإتمام كل نشاط في المشروع. ففي ظل أسلوب CPM يتم تحديد قيمة واحدة تعبر عن عدد معين من الفترات الزمنية والتي يعتقد الفنيون من خبرتهم السابقة أنها تعبر عن الوقت الذي سوف يستغرقه وقت إنجاز النشاط. وعلى ذلك فإن الفرض الرئيسي في ظل CPM هو فرض التأكد التام من وقت الإنجاز. وعلى العكس من ذلك تماماً، فإن الأساس الذي تنبني عليه تقديرات الوقت في ظل أسلوب PERT هو فرض الاحتمالية. فليس هناك تأكد تام من وقت الإنجاز اللازم للنشاط، ولكن هناك فقط نوعاً من المعرفة لإحتمال إتمام النشاط في فترات مختلفة. أي أن هناك فكرة عن التوزيع الاحتمالي لوقت إتمام كل نشاط. فالتوزيع الاحتمالي ماهو إلا القيم التي من الممكن أن يأخذها متغيراً عشوائياً random variable واحتمال حدوث كل قيمة من هذه القيم.

ولنعد الآن قليلاً إلى الفقرة السابقة لنعرف بدقة معنى التوزيع الإحتمالي Probability disribution . إن التعريف يذكر كلمة «كل» القيم التي يأخذها المتغير العشوائي، وعلى ذلك فإن مجموع احتمالات الحدوث لهذه القيم يجب أن يساوي الواحد الصحيح. ولنوضح ذلك بالمثال الوارد في الجدول (٤ ـ ١)، والذي يتضح منه أن وقت إتمام النشاط ينحصر بين أربعة وثمانية أيام. ويعني ذلك الخبرة السابقة تستبعد تماماً أن يتم انجاز النشاط في أقل من أربعة أيام أو في أكثر من ثمانية أيام. وبلغة الاحتمالات يمكن أن نقول أن احتمال إنجاز النشاط في ثلاثة أيام أو أقل يساوي صفراً. كذلك فإن احتمال إنجاز النشاط في تسعة أيام أو أكثر يساوي صفراً وعلى هدا فإن القيم ٤، ٥، ٦، ٧، ٨ هي كل القيم الممكنة لهذا المتغير العشوائي الذي هو وقت انجاز النشاط في هذه الحالة. وكما ذكرنا من قبل، فإنه ينبني على خاصية أن التوزيع الاحتمالي يتضمن «كل» القيم الممكنة للمتغير العشوائي، أن مجموع الاحتمالات لكل هذه القيم يجب أن يساوي الوحد الصحيح كما في المثال.

جدول (٤ ـ ١)

التوزيع الإحتمالي لوقت إنجاز النشاط

وقت إنجاز النشاط «بالأيام»	احتمال الحدوث
٤	,٢٠
٥	.٢٥
٦	.٢٥
٧	.٢٠
٨	.١٠
	١.٠٠

والسؤال التقليدي الآن هو كيف يمكن التوصل إلى هذه الإحتمالات لكل قيمة من هذه القيم؟ إن الاجابة تكمن فيما يسمى بالتوزيع الاحتمالي التجريبي empirical distribution والتوزيع الاحتمالي الرياضي mathematical distribution أما الأول، فهو التوزيع الذي يتم التوصل إليه من الخبرات السابقة والمعلومات المتراكمة عن الأنشطة المماثلة أو المشابهة. وعن طريق بعض العمليات الإحصائية البسيطة، يتم تسجيل عدد الحالات التي حدث فيها إتمام النشاط من قبل في زمن معين، ويطلق على ذلك التكرار Frequency. ثم يتم ترجمة ذلك إلى ما يسمى بالتكرار النسبي، وهو بالتمام الاحتمال. فالتكرار النسبي ماهو إلا التكزار الأصلي مقسوماً على عدد المشاهدات التاريخية التي تم تسجيلها من قبل. وبالطبع يكون ذلك في شكل نسبة مئوية تقل عن الواحد الصحيح. ويوضح المثال البسيط التالي في الجدول (٤ ـ ٢) كيفية الوصول إلى التوزيع الاحتمالي التجريبي.

جدول (٤ ـ ٢)

كيفية الوصول إلى التوزيع الاحتمالي التجريبي

وقت إنجاز النشاط من واقع السجلات التاريخية	عدد مرات حدوث هذه القيمة في الخمسين حالة التي تم داستها	التكرار المطلق	التكرار النسبي = احتمال الحدوث
١٠ يوم	١٥ مرة	١٥	١٥ ÷ ٥٠ = ,٣٠
١١ يوم	٢٠ مرة	٢٠	٢٠ ÷ ٥٠ = ,٤٠
١٢ يوم	١٥ مرة	٥	١٥ ÷ ٥٠ = ,٣٠
عدد الحالات التي تم دراستها	٥٠ حالة	٥٠	١,٠٠

وبالطبع بعد القيام بهذه الخطوات الموضحة في الجدول (٤ ـ ٢) يتم الاعتماد فقط على العمودين الأول والأخير للتعبير عن التوزيع الاحتمالي التجريبي لوقت انجاز النشاط. كذلك فإن مثل هذة الخطوات يتم القيام بها لكل نشاط أساسي بالنسبة للمشروع. وبالتالي يكون لدينا توزيعاً احتمالياً لكل نشاط. ويهمنا هنا أن نوضح أنه على الرغم من بساطة هذا المدخل إلا أن عليه بعض التحفظات التي يجب الإلمام بها.. وأهمها:

١ ـ في حالة وجود قيماً متعددة لوقت إنحاز النشاط، وفي حالة كبر عدد الحالات سابقة التي يتم دراستها، يصعب القيام بذلك يدوياً. ولكن استخدام الكومبيوتر يكون هو المدخل الطبيعي لمثل هذه الحالات. ويفيد الكومبيوتر في عمل نوع من الاستبعاد للقيم التي يكون احتمال حدوثها ضئيل للغاية.

٢ ـ ناقشنا في هذا المثال حالة القيم المنفصلة discrete للمتغير العشوائي. فلم تناقش احتمال الاتمام في عشرة أيام ونصف أو في احدى عشرة يوماً وربع. وتعرف هذه الحالة الأخيرة بحالة القيم المتصلة Continuous للمتغير العشوائي. وهي الحالة التي يمكن أن يأخذ فيها المتغير العشوائي أية قيمة بين القيم المنفصلة.

وقد تكون هذه الحالة هامة عندما تكون فترة القياس هي الشهر أو اسنة. وهناك أنواع خاصة من التوزيعات الاحتمالية التي تعالج هذه الحالة والتي يمكن خلقها باستخدام الكومبيوتر في حالة معرفة المعالم الأساسية للتوزيع المتصل من البيانات التاريخية السابقة لنشاط معين، وتسمى هذه بعملية المحاكاة Simulation فهناك برنامج PERT SIMULATION (والمعروف باختصار PERT-SIM) والذي يمكن من خلق بيانات احتمالية حسب أي شكل من أشكال التوزيعات الاحصائية.

٣ ـ إن نجاح هذه الطريقة يعتمد على وجود بيانات متراكمة دقيقة عن أنشطة

متماثلة أو متشابهة. فيجب التأكد أولاً من هذا الشرط قبل استخدام البيانات في عملية التنبؤ وتقدير الاحتمالات. ويساعد على تحقق هذا الشرط أن يتم تجزأة المشروع، كما ذكرنا من قبل إلى مجموعة من الأنشطة تعتبر أساسية يتم انجازها في غالبية المشروعات. أو أن تكون هناك معدلات للإنجاز تربط بين وقت الانجاز وحجم العمل الذي يؤدي.

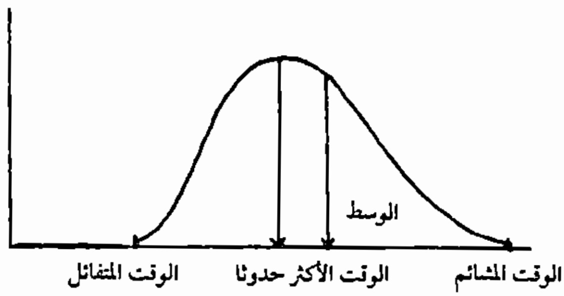
٤ ـ سوف يؤدي هذا المدخل إلى وجود بيانات خاصة بكل نشاط ونوع معين من التوزيع الاحتمالي لكل نشاط. ولذلك فإن محاولة استخلاص نتائج احصائية خاصة بالمشروع ككل، والذي يتكون من هذه الأنشطة، سوف يصبح صعباً من الناحية الاحصائية. أو على الأقل يجب أن يؤخذ بحذر وتتم معالجته بجهد أكبر. على عكس الحالة التي يكون فيها نوع التوزيع الاحصائي واحد لكل الأنشطة.

إذا كان هذا هو مدخل التوزيع الاحتمالي التجريبي.. فماذا عن مدخل التوزيع الاحتمالي الرياضي؟ التوزيع الاحتمالي الرياضي هو عبارة عن دالة رياضية معينة تربط بين قيم المتغير العشوائي واحتمالات الحدوث لهذه القيم. ويوجد منها التوزيعات المنفصلة discrete distributions والتوزيعات المتصلة Continuous distributions. ومن مزايا هذه التوزيعات امكانية المعالجة الرياضية. ويرجع ذلك أساساً إلى وجود معادلات رياضية خاصة تحدد معالم التوزيع الاحصائي وهي الوسط الحسابي والانحراف المعياري. ولذلك فإن المعادلة الاحصائية لوقت اتمام المشروع ككل، الذي يتكون من عدة أنشطة، تكون أسهل احصائياً.

ومن بين هذه التوزيعات الاحتمالية الرياضية المتصلة هناك توزيعاً إحصائياً يشاع استخدامه لتقدير وقت اتمام النشاط، ويطلق عليه توزيع بيتا beta. ويستلزم هذا التوزيع تحديدا لثلاثة تقديرات للوقت اللازم لكل نشاط كما في الشكل (٤ ـ١). ويتضح من هذا الشكل أن هناك تقديرات ثلاث للوقت اللازم

لاتمام النشاط، وهي :

أ ــ الوقت المتفائل optimistic estimate (ف) .. وهو أقل قيمة ممكنة للوقت المقدر لإنجاز النشاط. وهي التي تقوم على فرض أن كل الظروف الخاصة بالأداء والموارد اللازمة على ما يرام. ولذلك فإن احتمال أن يتم نجاز النشاط في وقت أقل من هذه القيمة هو احتمال ضئيل جداً، لا يزيد على ١٪.



شكل (٤ ـ ١)
توزيع بيتا لوقت إنجاز النشاط

ب ــ الوقت المتشائم pessimistic estimate (ش) . . . هو أكبر قيمة ممكنة للوقت المقدر لانجاز النشاط. وهي التي تقوم على فرض أن أسوء ظروف التنفيذ سوف تواجه تنفيذ هذا النشاط. وبالمثل فإن احتمال أن يتم انجاز النشط في فترة أكبر من هذه القيمة هو احتمال ضئيل جداً لا يزيد على ١٪.

جـ ــ الوقت الأكثر حدوثاً most likely estimate (ك) . . وهذه هي القيمة التي يتكرر حدوثها كثيراً كوقتاً مستغرقاً لاتمام النشاط ـ أي أنها بمثابة المنوال modal للتوزيع الاحصائي الخاص بالوقت اللازم لاتمام النشاط.

ويتم عمل هذه التقديرات عن طريق الإدارة والمتخصصين الفنيين الذين مارسوا من قبل أنشطة مشابهة ومماثلة في ذات المجال. كذلك يمكن الاعتماد على البيانات التاريخية المتراكمة السابقة كما أوضحنا في التوزيعات التجريبية.

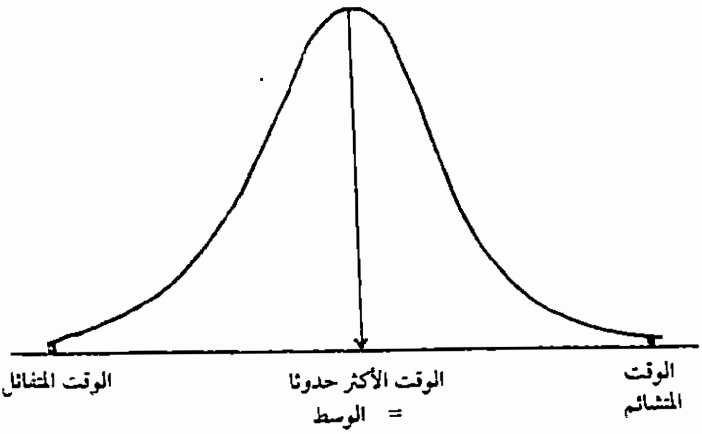
وتجدر هنا الإشارة إلى أنه على الرغم من عدم وجود تبريراً نظرياً لاستخدام توزيع بيتا بالذات في هذه الحالة، إلا أنه عمليا يمتاز بعدة خصائص تجعله شائع الاستخدام. فالتوزيع يمكن أن يأخذ الشكل المعتدل Symmetrical (كما في الشكل ٤ - ٢ - أ) أو شكل الميل ناحية اليسار Skewed to lift (كما في الشكل ٤ - ٢ - ب) أو شكل الميل ناحية اليمين Skewed to right (كما في الشكل الأصلي ٤ - ١)، وذلك حسب طبيعة توزيع الوقت اللازم للنشاط. وذلك نوعاً من المرونة في استخدام التوزيع. كذلك فإنه من مزايا هذا التوزيع أنه يمكن تقدير كل من الوسط والتباين لوقت اتمام النشاط من قيم الوقت الثلاث المقدرة باستخدام معادلات بسيطة. وأخيراً فإن هذا التوزيع يتسم بأنه وحيد المنوال unimodal وأن معظم الاحتمالات تتركز حول هذه القيمة.

وحسب توزيع beta فإن كل نشاط يتم تقدير متوسط الوقت اللازم لإنجازه، والذي يطلق عليه الوقت المتوقع Expected time (وق) كما يلي:

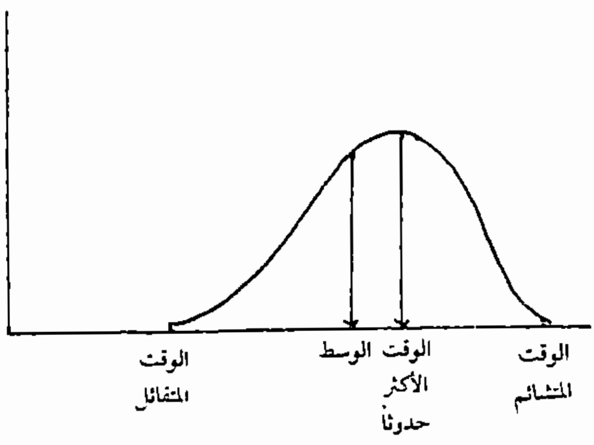
$$\text{وق} = \frac{\text{ف} + ٤\,\text{ك} + \text{ش}}{٦} \qquad (٦)$$

ومن الواضح أن هذه الطريقة تقوم على فكرة الوسط المرجح والذي يعطي القيمة الأكثر شيوعاً وزناً نسبياً يعادل أربعة مرات قيمة الوزن النسبي الذي يعطى لكل من القيم المتطرقة ف، ش. كما أن التباين لوقت النشاط يحسب على النحو التالي.

$$\text{س}^٢ = \left(\frac{\text{ش} - \text{ف}}{٦}\right)^٢ \qquad (٢)$$



الشكل (٤ ـ ٢ ـ أ)



الشكل (٤ ـ ٢ ـ ب)

وتقوم هده المعادلة على الفكرة السـائدة احصـائيا وهي أن الفـرق بين القيم المتـطرفـة لأي تـوزيـع يعـادل ستـة وحـدات إنحـراف معيـاري. أي أن (ش - ف) = ٦ س، حيث أن الانحراف المعياري س مـا هو إلا الجـذر التربيعي للتباين $س^٢$

مثال (٤ ـ ١):

فيما يلي البيانات الخاصة بأحد المشروعات

مسلسل	النشاط	حدث البدء والإتمام	النشاط السابق مباشرة	الوقت المفاءل حدوثاً بالأيام (ف)	الوقت الأكثر بالأيام (ك)	الوقت المشاؤم بالأيام (ش)
١	أ	١ ـ ٢	ـ	٥	١١	١١
٢	ب	٢ ـ ٦	ـ	١٠	١٠	١٠
٣	ج	١ ـ ٤	ـ	٢	٥	٨
٤	د	٢ ـ ٦	أ	١	٧	١٣
٥	هـ	٣ ـ ٦	ب ، ج	٤	٤	١٠
٦	و	ب ، ج	٤	٧	١٠	
٧	ز	٣ ـ ٥	ب ، ج	٢	٢	٢
٨	ح	٤ ـ ٥	ج	صفر	٦	٦
٩	ط	٥ ـ ٧	ز ، ح	٢	٨	١٤
١٠	ك	٦ ـ ٧	د ، هـ	١	٤	٧

والمطلوب

باستخدام أسلوب PERT، وضح:

أ ــ أقل وقت متوقع لإتمام المشروع.

ب ــ تحديد المسار الحرج والأنشطة الحرجة.

جـ ــ ما هو احتمال إتمام المشروع في ظرف ٢٣ يوماً.
د ــ ما هو احتمال اتمام المشروع بين ٢٣ و ٢٥ يوماً.
هـ ــ إذا كانت هناك غرامة تأخير تقضي بدفع ١٠٠٠ جنيه غرامة في حالة عدم التسليم في ظرف ٢٥ يوماً. احسب القيمة المتوقعة للغرامة المدفوعة.

الحل:

١ ــ نبدأ الحل بتحديد متوسط الوقت المتوقع لإتمام كل نشاط باستخدام المعادلة.

$$\text{وق} = \frac{\text{ف} + ٤\ \text{ك} + \text{ش}}{٦}$$

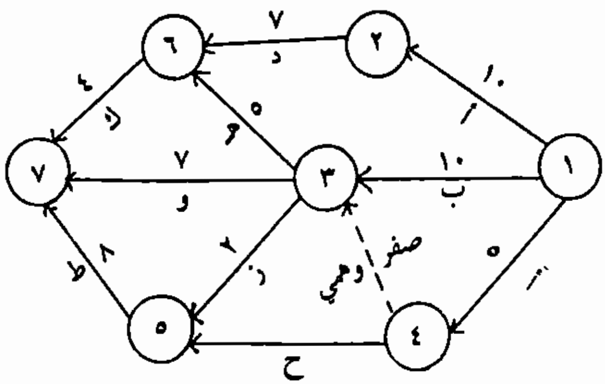
والتباين باستخدام المعادلة

$$\text{س}^{٢} = \left(\frac{\text{ش} - \text{ف}}{٦}\right)^{٢}$$

وذلك كما في الجدول (٤ ـ ٣)

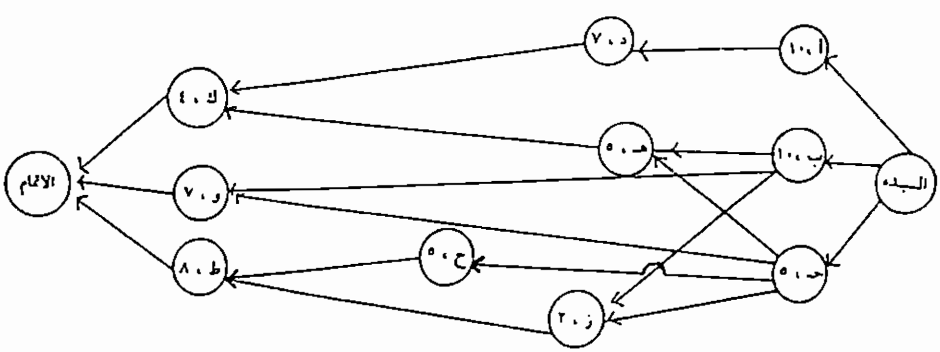
النشاط	الوقت المتوقع (وق)	التباين س²
ا	[٥+٤ (١١)+ ١١] ÷ ٦ = ١٠	[(١١ - ٥) ÷ ٦]² = ١
ب	[١٠+٤ (١٠)+ ١٠] ÷ ٦ = ١٠	[(١٠ - ١٠) ÷ ٦]² = صفر
ج	[٢+٤ (٥)+ ٨] ÷ ٦ = ٥	[(٨ - ٢) ÷ ٦]² = ١
د	[١+٤ (٧)+ ١٣] ÷ ٦ = ٧	[(١٣ - ١) ÷ ٦]² = ٤
هـ	[٤+٤ (٤)+ ١٠] ÷ ٦ = ٥	[(١٠ - ٤) ÷ ٦]² = ١
و	[٤+٤ (٧)+ ١٠] ÷ ٦ = ٧	[(١٠ - ٤) ÷ ٦]² = ١
ز	[٢+٤ (٢)+ ٢] ÷ ٦ = ٢	[(٢ - ٢) ÷ ٦]² = صفر
ح	[صفر+٤ (٦)+ ٦] ÷ ٦ = ٥	[(٦ - صفر) ÷ ٦]² = ١
ط	[٢+٤ (٨)+ ١٤] ÷ ٦ = ٨	[(١٤ - ٢) ÷ ٦]² = ٤
ك	[١+٤ (٤)+ ٧] ÷ ٦ = ٤	[(٧ - ١) ÷ ٦]² = ١

٢ ـ تقوم برسم الشبكة حسب أسلوب PERT موضحاً عليها الوقت المتوقع لإنجاز كل نشاط كما في الشكل (٤ ـ ٣).



شكل (٤ ـ٣)

وتجدر هنا الإشارة إلى أنه عمليا يمكن تصوير هذه المشكلة باستخدام أسلوب CPM ، فلا يؤثر ذلك إطلاقاً على التحليل الذي سوف يتم فيما بعد، كما أن أسلوب CPM يمتاز بالسهولة وعدم الحاجة إلى أنشطة وهمية. وفي هذه الحالة يكون الرسم كما في الشكل (٤ ـ ٤).



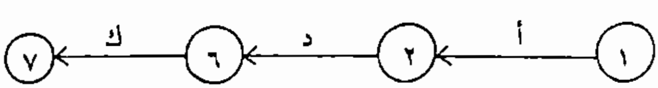
شكل (٤ ـ ٤)

٣ ـ نقـوم بنفس الخطوات التي تتبـع في أسلوب المسار الحـرج لتحديـد أقل وقت يلزم لإتمام المشروع والمسار الحرج والأنشطة الحرجة، وذلك عن طريق تحديد كـل من أول وآخـر وقت بـدء وأول وآخـر وقت إتمـام لكـل نشـاط، كـما في الجدول (٤ ـ ٤).

النشاط	الوقت المتوقع	وقت البدء		وقت الإتمام		الفائض
		أول وقت بدء	آخر وقت إتمام	أول وقت إتمام	آخر وقت	
	١٠	صفر	صفر	١٠	١٠	صفر
ب	١٠	صفر	١	١٠	١١	١
ج	٥	صفر	٣	٥	٨	٣
د	٧	١٠	١٠	١٧	١٧	صفر
وهمي	صفر	٥	١١	٥	١١	٦
هـ	٥	١٠	١٢	١٥	١٧	٢
و	٧	١٠	١٤	١٧	٢١	٤
ز	٢	١٠	١١	١٢	١٣	١
ح	٥	٥	٨	١٠	١٣	٣
ط	٨	١٢	١٣	٢٠	٢١	١
ك	٤	١٧	١٧	٢١	٢١	صفر

جدول (٤ ـ ٤)

ويتضح من هذا الجدول أن أقل وقت متوقع يلزم لإتمـام المشروع ككل هـو ٢١ يوماً، كما أن المسار الحرج هو

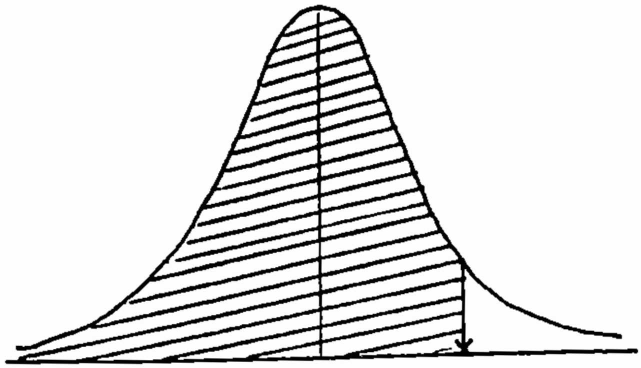


والأنشطة الحرجة هي أ، د، ك، والتي لها وقت فائض Slack = صفر

التحليل الاحتمالي :

طالما أن الرقم الذي توصلنا إليه هو مجموع القيم المتوقعة لوقت الأنشطة الحرجة، فإن هذا الرقم في حد ذاته يمثل مجرد المتوسط أو القيمة المتوقعة لوقت إتمام المشروع. ويعني ذلك أن وقت إتمام المشروع هو متغيراً عشوائياً random variable له توزيع احصائي وأن رقم الـ ٢١ ما هو إلا متوسط هذا التوزيع. ويعد هذا صحيحاً طالما أن القيم المقدرة لكل الأنشطة من المفترض أنها مستقلة إحصائيا uncorrelated.

وحسب الخاصية الاحصائية Central limit theorm فإنه إذا كان هناك متغيراً عشوائياً مخلقاً من متغيرات أخرى عشوائية ذات توزيعات إحصائية متباينة فإن توزيع المتوسطات للمتغير العشوائي الجديد يقترب جداً من شكل التوزيع المعتدل normal distribution. وعلى ذلك فإن الوقت اللازم لإتمام المشروع يمكن تصويره في شكل توزيعاً معتدلاً كما يلي:



الوقت المتوقع
لإتمام المشروع = ٢١ يوم

شكل (٤ ـ ٥)

وعند هذه النقطة يمكننا الاعتماد على خصائص التوزيع المعتدل في عمل التحليلات الاحتمالية. فعلى سبيل المثال ما هو احتمال إتمام المشروع في ظرف ٢٣ يوماً؟ الإجابة هي كل المنطقة المظللة التي تقع على يسار القيمة ٢٣ كما في الشكل (٤ ـ ٥). ولتحديد مقدار هذه المنطقة باستخدام جداول التوزيع المعتدل (راجع الجدول في آخر هذا الفصل) نستخدم العلاقة.

الحد الأعلى = المتوسط + Z (الإنحراف المعياري).

أما الحد الأعلى فهو عبارة عن ٢٣ والمتوسط هو ٢١ يوم.

والسؤال الآن ما هو الإنحراف المعياري لتوزيع وقت إتمام المشروع؟ طالما أن وقت المشروع ناتج عن مجموعة من الأنشطة الحرجة فإن تباينه variance يمكن تقديره من مجموع تباين الأنشطة الحرجة. لاحظ أننا لم تقل انحرافه المعياري. ويرجع ذلك إلى الحقيقة الاحصائية القائلة بأنه لايمكن جمع الإنحراف المعياري ولكن يمكن جمع التباين فقط.

وعلى ذلك فإن تباين وقت إتمام المشروع

= وقت تباين النشاط أ + وقت تباين النشاط د + وقت تباين النشاط ك
= ١ + ٤ + ١ = ٦

وعلى ذلك فإن الإنحراف المعياري لوقت إتمام المشروع = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{٦}$
= ٢,٤٤٩

وبوضع كل هذه المعلومات في العلاقة السابقة الخاصة بنقطة الحد الأعلى يمكننا تحديد قيمة Z كما يلي

٢٣ = ٢١ + Z (٢,٤٤٩)
ومنها Z = (٢٣ − ١٢) ÷ ٢,٤٤٩ = ,٨١٧

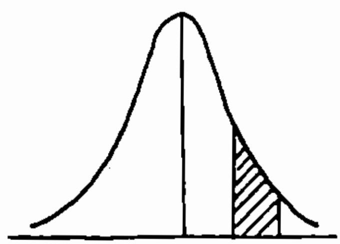
وباستخدام جدول التوزيع المعتدل Z يمكن تحديد احتمال إتمام المشروع في ظرف ٢٣ يوماً على النحو التالي:

بالكشف في الجدول يتضح أن المنطقة تحت المنحنى والتي تقع بين الوقت المتوقع لإتمام المشروع (٢١ يوم) والحد الأعلى هي
, ٢٩٣٩

يتم إضافة ٥٠٠٠, إلى القيمة التي توصلنا إليها حتى يمكن التوصل إلى احتمال إتمام المشروع في خلال ٢٣ يوماً على النحو التالي
= ,٢٩٣٩ + ,٥٠٠٠ = ,٧٩٣٩
أي أنه يساوي ٧٩,٣٩ ٪

وتفيد هذه النتائج في أن يقوم القائم على تخطيط المشروع بتقييم ما إذا كانت جداول التشغيل المقترحة مقبولة أم لا. فعلى سبيل المثال، إذا اعتبر أن ٧٩,٣٩٪ هذه غير مقبولة لإتمام المشروع خلال ٢٣ يوماً، فإنه قد يستلزم الأمر إضافة موارد جديدة إلى الأنشطة الحرجة. وسوف يؤدي مثل هذا الإجراء إلى تخفيض وقت الإتمام المتوقع والتباين للمشروع بشكل يزيد من احتمال اتمام المشروع خلال ٢٣ يوماً.

وبنفس الطريقة يمكن على سبيل المثال تحديد احتمال أن يتم اتمام المشروع بين ٢٣ يوماً و ٢٥ يوماً كما هو مبين في الشكل (٤ ـ ٦).



شكل (٤ ـ ٦)

ولتحديد قيمة المنطقة المظللة يمكن تحديد المنطقة التي تقع بين ٢٥ و ٢١ ثم قيمة المنطقة التي تنحصر بين ٢٣ و ٢١ ، ثم طرح القيمة الثانية من الأولى كما يلي:

(أ) ٢٥ = ٢١ + Z (٢,٤٤٩)

ومنها Z = (٢٥ - ٢١) ÷ ٢,٤٤٩ = ١,٦٣٣

وعلى ذلك فإن المنطقة بين ٢٥ و ٢١ هي ٤٤٨٤, كما في الجدول.

(ب) ٢٣ = ٢١ + Z (٢,٤٤٩)

ومنها Z = (٢٣ - ٢١) ÷ ٢,٤٤٩ = ٨١٦٦,

وعلى ذلك فإن المنطقة بين ٢٣ و ٢١ هي ٢٩٣٩, كما في الجدول.

(جـ) من (أ)، (ب) فإن احتمال اتمام المشروع في فترة تنحصر بين ٢٣ ، ٢٥

= ٤٤٨٤, - ٢٩٣٩, = ١٥٤٥,

أي أنه يساوي ١٥,٤٥٪

بالإضافة إلى ذلك، فإن هذا النوع من التحليل الاحتمالي يفيد في تقدير قيمة الغرامات المتوقعة في حالة وجود شرط في العقد يقضي بدفع غرامات تأخير عند تأخر التسليم عن تاريخ معين. ويقوم ذلك على الاستخدام المباشر لفكرة القيمة المتوقعة، والتي تقوم على ضرب القيمة الأصلية في احتمال تحققها.

ففي المثال الحالي وجدنا أن المنطقة التي تنحصر بين ٢٥ و ٢١ يوماً هي ٤٤٨٤, . وعلى ذلك فإن احتمال إتمام المشروع في خلال ٢٥ يوماً هو ٩٤٨٤, . ويعني ذلك أن احتمال التأخير عن ٢٥ يوماً هو

١ - ٩٤٨٤, = ٠٥١٦,

فإذا كان هناك شرطاً جزائيا يقضي بدفع غرامة قدرها ١٠٠٠ جنيه في حالة تأخر المشروع عن ٢٥ يوماً. فإن القيمة المتوقعة لهذه الغرامة

٥١٦, × ١٠٠٠ = ٥١,٦ جنيها فقط لا غير.

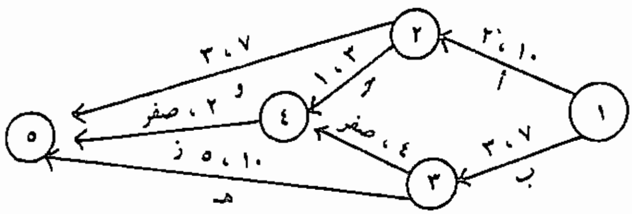
ويفيد ذلك الشركة التي تتولى التنفيذ عندما تقوم بتوقيع مجموعة من العقود. فيجب أن تحسب بدقة القيمة المتوقعة لإجمالي التعويضات التي قد تضطر إلى دفعها في حالة التأخير. كذلك فعندما تكون الشركة مطمئنة إلى إمكانية التنفيذ في الموعد المتفق عليه، يمكنها في مثل هذه الحالات رفع قيمة التعويض في الشرط الجزائي كوسيلة تسويقية لإقناع الجهات التي يتم إتمام المشروع لحسابها بقبول العرض الذي تتقدم به.

ومن الجدير بالذكر هنا أيضا الأهمية الخاصة لقيمة تباين وقت إتمام المشروع ككل في حالة أسلوب PERT. فعلى الرغم من أن مثالنا السابق كان واضحاً إلى حد كبير، إلا أنه قد تظهر بعض الحالات الخاصة التي يجب أخذها بحذر عند إجراء الحسابات والتقديرات السابقة.

والحالة الأولى التي قد تظهر هنا هي حالة وجود أكثر من مسار حرج في شبكة PERT. وقد أوضحنا من قبل، عن استخدام أسلوب CPM أن ذلك أمراً ممكنا. وطالما أن طول المسارات الحرجة جميعها واحداً فإنه لاتوجد مشكلة فيما يتعلق بالوقت المتوقع لإتمام المشروع. أما المشكلة الحقيقية فتظهر عند تحديد التباين الخاص بكل مسار حرج. فإذا اتضح أيضاً أن التباين واحداً بالنسبة لكل المسارات فلا توجد أية مشكلة خاصة عند تقدير الاحتمالات. ونقوم بالخطوات كما في المثال السابق. فليس لدينا إلا تقدير واحد للوقت المتوقع لإتمام المشروع وتقدير واحد لتباين وقت إتمام المشروع. أما إذا اتضح أن هناك قيماً مختلفة للتباينات الخاصة بالمسارات الحرجة فإنه يجب الحذر في هذه الحالة. والحذر يقضي بأن يتم اختيار **التباين الأعلى واعتباره تبايناً لوقت إتمام المشروع، ويتم تقدير كافة الاحتمالات بناءاً على ذلك.**

مثال (٤ - ٢) حالة وجود أكثر من مسار حرج لكل منها تبايناً مختلفاً:

فيما يلي البيانات الخاصة بأحد شبكات الأعمال والتي يظهر فيها متوسط الوقت المتوقع والتباين الخاص بكل نشاط على أعلى السهم الخاص بكل نشط.



والمطلوب: تحديد احتمال انجاز المشروع في خلال ٢٠ يوماً.

بتأمل البيانات الواردة في الشبكة يتضح أن هناك مسارين حرجين هما

أ ← و

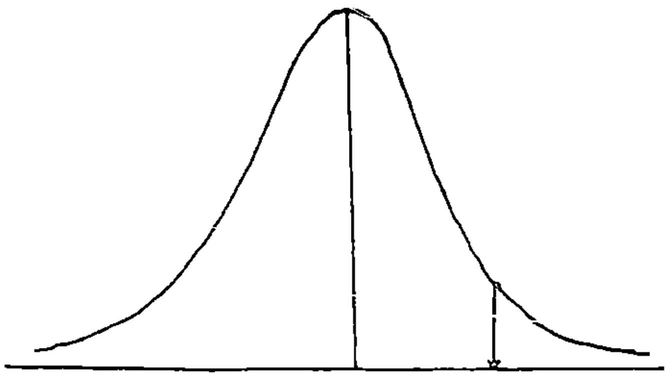
، ب ← هـ

وطول كل منهما هو ١٧. وعلى ذلك فإن الوقت المتوقع لإتمام المشروع هو ١٧ يوم. أما المشكلة الآن فهي في وجود أكثر من تباين. فالتباين الخاص بالمسار الأول.

= ٢ + ٣ = ٥، وعلى ذلك فإن الإنحراف المعياري بناءًا على المسار أ ← و = ٢,٢٣٦.

وكذلك فإن التباين الخاص بالمسار الثاني = ٣ + ٥ = ٨، وعلى ذلك فإن الإنحراف المعياري بناءاً على المسار ب ← هـ = ٢,٨٢٨.

وكما ذكرنا من قبل فإن منطق الحذر يقتضي الإعتماد على التباين الأعلى وبالتالي على الإنحراف المعياري الأعلى للتوزيع الخاص بوقت إتمام المشروع كما يلي:



انحراف معياري = ٢,٨٢٨

ولحساب احتمال الإنجاز في خلال ٢٠ يوماً نستخدم العلاقة التالية:

الحد الأعلى = الوقت المتوقع للمشروع + Z (الإنحراف المعياري)

٢٠ = ١٧ + Z (٢,٢٨)

ومنها Z = (٢٠ − ١٧) ÷ ٢,٨٢٨ = ١,٠٦

وبالكشف في جدول التوزيع المعتدل المعياري Z يتضح أن المنطقة التي تنحصر بين ١٧، ٢٠ = ,٣٥٥٤

ويعني ذلك أن احتمال إنجاز المشروع في خلال ٢٠ يوماً

= ,٣٥٥٤ + ,٥٠٠٠ = ,٨٥٥٤

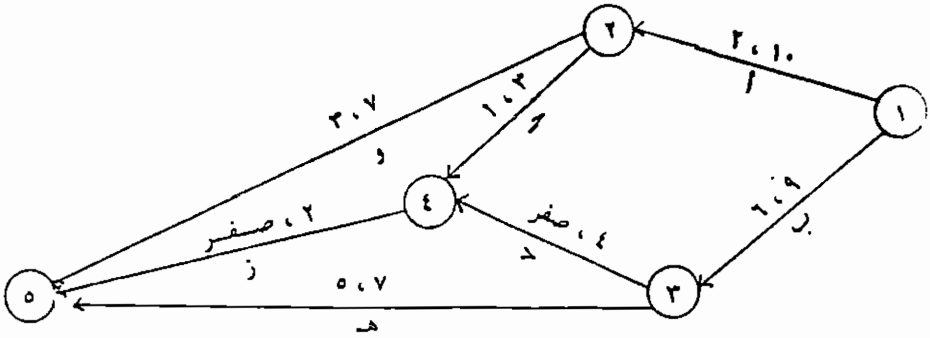
= ٨٥,٥٤٪

أما الحالة الثانية التي قد تظهر أيضا فهي أن يكون تباين أحد المسارات الغير حرجة كبيراً إلى الحد الذي ينتج عنه أنه يصبح العوامل المحددة في احتمال وقت إنجاز المشروع. أي أن المسار الحرج لا يصبح هو العامل المحدد في احتمال الإنجاز. ولنأخذ المثالي التالي لإيضاح هذه الحالة.

مثال (٤ ـ ٣) حالة المسار القريب من الحرج ذو التباين الأعلى:

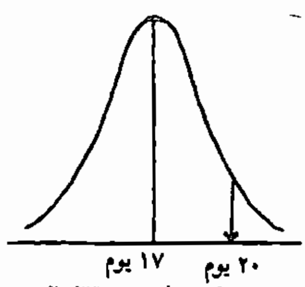
في ذات المثال السابق. وبفرض تعديل القيم الخاصة بالوقت المتوقع

والتباين للأنشطة كما هو موضح في الشبكة.



المطلوب: تحديد احتمال إنجاز المشروع في خلال ٢٠ يوماً

بتأمل الشبكة يتضح أن المسار الحرج هو أ ← و، وأن طول هذا المسار = ١٧ وعلى ذلك فإن الوقت المتوقع لإتمام المشروع هو ١٧ يوماً، والتباين جود على المسار الحرج هو ٥. وباستخدام القواعد السابقة، والبيانات المتاحة عا المسار الحرج فقط، يكون توزيع وقت إتمام المشروع كما يلي.



وباستخدام نفس العلاقة

Z = (٢٠ - ١٧) ÷ ٢,٢٣٦ = ١,٣٤٢

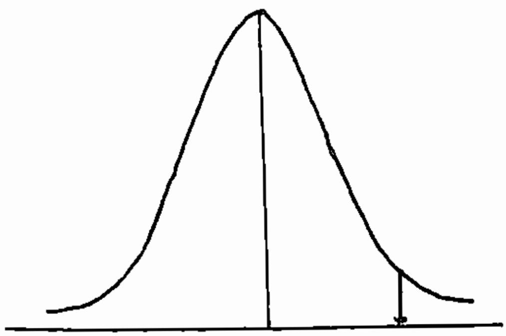
نجد أن احتمال إتمام المشروع في خلال ٢٠ يوماً = ,٩٠٩٩

٪٩٠,٩٩

(١)

ولنأخذ الآن مدخلا آخر وهو الاعتماد على المسار الذي يلي المسار الحرج. بتأمل الشبكة يتضح أن المسار الذي يلي المسار الحرج هو المسار ب ← هـ والذي طوله ١٦ يوماً ومجموع التباين عليه = ٦ + ٥ = ١١. أي أن الإنحراف المعياري = ٣,٣١٧.

ولنحاول الآن الاعتماد على هذه البيانات في تقدير احتمال الاتمام خلال عشرون يوماً.



الحد الأعلى = القيمة المتوقعة + Z (الإنحراف المعياري)

٢٠ = ١٦ + Z (٣,٣١٧)

ومنها Z = (٢٠ − ١٦) ÷ ٣,٣١٧ = ١,٢٠٦

وعلى ذلك فإن احتمال إتمام المشروع خلال ٢٠ يوماً

= ,٣٨٦٩ + ,٥٠٠٠ = ,٨٨٦٩

٨٨,٦٩٪ (٢)

بمقارنة النتائج التي توصلنا إليها في كل من (١)، (٢) يتضح أن الاعتماد على المسار الحرج أوضحت أن احتمال إتمام المشروع في خلال ٢٠ يوماً هو ٩٩,٩٠٪ بينما أوضحت بيانات المسار القريب من الحرج near critical أن احتمال الاتمام خلال ٢٠ يوماً هو ٨٨,٦٩٪ فقط. ويرجع ذلك أساساً إلى تأثير التباين المرتفع للمسار القريب من الحرج.

وتقضي مثل هذه الحالة الحذر في الاعتماد على نتائج البيانات التي يتم الحصول عليها من المسار الحرج فقط. ولكن يتم أيضاً تحديد المسارات القريبة من الحرجة وبصفة خاصة التي يكون لها تباينا مرتفعا. وقد أصبح ذلك ميسوراً باستخدام الكومبيوتر. فكثير من برامج الكومبيوتر التي تستخدم في حل مشاكل PERT تقدم قائمة بما يسمى بالمسارات القريبة من الحرجة وتباين الوقت الخاص منها.

الفروض الأساسية:

يهمنا هنا أن نوضح أنه على الرغم من بساطة هذا النوع من التحليل الاحتمالي باستخدام أسلوب PERT، إلا أنه قد ثبت نجاحه في الممارسات العملية. ومع ذلك فإننا يجب أن ندرك، وبشكل دائم، أنه يقوم على مجموعة من الفروض الأساسية، هي:

١ ـ القيمة المتوقعة والتباين لكل نشاط يتم تقديرهم بشكل دقيق باستخدام المعادلتين (١)، (٢) السالفتين.

٢ ـ إن الأنشطة جميعها تعتبر مستقلة إحصائياً وذلك لغرض تحديد التباينات الخاصة بالأحداث events.

٣ ـ إن عدد الأنشطة الموجودة على المسار الحرج يعد كبيراً إلى الحد الذي يبرر استخدام Central limit theorm والتي تقضي بأن يكون وقت إتمام المشروع المتوقع موزعاً توزيعاً معتدلاً.

٤ ـ إن توزيع الوقت الخاص بأطول مسار مؤدي إلى حدثاً معيناً يمثل تقديراً معقولاً لأول وقت مبكر ممكن أن يتم حدوث هذا الحدث فيه. وذلك يعني أنه ليس من الممكن لمسار آخر أقصر من هذا المسار ومؤدى إلى نفس الحدث أن يكون مجموع الوقت عليه المتراكم أكثر من أطول المسارات الموصلة إلى الحدث.

وقد تعرض أسلوب PERT لبعض الانتقادات التي توجه أساساً إلى هذه الفروض الإحصائية. فقد أثبت Grubbs أن قيم المتوسط والتباين المستخدمة في أسلوب PERT للتوزيع الاحصائي Beta ما هي إلا متوسطات وتباينات لقيم متطرفة وليست لمتوسطات متغيرات عشوائية يتم بها تقدير الأوقات الثلاثة[١٥]. كذلك أثبت Fulkerson أن الوقت المتوقع لإتمام المشروع المحسوب باستخدام أسلوب PERT هو دائماً تقدير متفائل (يميل إلى أن يكون أقل من المتوسط الفعلي)، ثم قدم أسلوباً لتحسين هذا التقدير[١٤]. وقد أيد هذا الانتقاد الأخير Maciariello حينما أوضح أن التوزيع الحقيقي لوقت إتمام النشاط لكثير من الأنشطة في المشروع يميل إلى أن يكون مائل أكثر تجاه اليمين Positively Skewed. ويعني ذلك أن احتمال حدوث أشياء غير متوقعة تؤدي إلى زيادة وقت النشاط أكبر من احتمال حدوث أشياء غير متوقعة تؤدي إلى تخفيض وقت النشاط، وذلك عن أكثر القيم شيوعاً. وذلك يعني أن في حالة وجود هذا النوع من الأنشطة بكثرة في الشبكة فإن القيمة الأكثر شيوعاً لهذه الأنشطة تكون في الغالب متفاءلة إلى حد كبير quite optimistic[٢٤].

وعلى الرغم من هذه الانتقادات، إلى أن بساطة المنهج الذي يقوم عليه الأسلوب والمزايا العديدة التي تحققت من عملية الاستخدام كانت ولا زالت سبباً في شيوع انتشار هذا الأسلوب.

الفصل السادس
نظريــة صفــوف الانتظــــار

* المكونات الأساسية لمشكلة صفوف الأنتظار
* التوزيعات الاحصائية الخاصة بعملية الوصول لطلب الخدمة
* معدل أداء الخدمة
* النماذج الرياضية لصفوف الانتظار

الفصل السادس

نظرية صفوف الانتظار

Watting line Theory

يتنانل هذا الفصل نوعاً معيناً من الظواهر التي يسهل أن نجدها تحيط بنا في الحياة العملية . وهي علي وجه التحديد ظاهرة وجود صفوف انتظار Wating Lines أو طوابير Queues فهذه الظاهرة موجودة في محطات خدمة السيارات وفي مكاتب تقديم الخدمات الحكومية وفي عمليات السفر منها البرى أو الجوي أو البحري بل أيضا في المحلات التجارية وفي مطاعم والمستشفيات . ولا شك أن وجود هذه الظاهرة يستحق الدراسة نظراً لأنها غالبا ما تنطوي علي وجود نقاط أختناق Congestion عادة ما تؤدي إلي آثار غير مرغوبة سواء من قبل طالب الخدمة أو مقدمها . فعندما يكون هناك اختناق عادة ما يضطر طالب الخدمة إلي الانتظار لفترات أطول مما هو متوقع ويصاحب ذلك أن يبذل جهد غير عادي أيضا للحصول علي الخدمة . كذلك فإن وجود الاختناقات يمثل نوعاً من الضغط علي مقدم الخدمة لشكل قد يؤثر علي جودة أداء الخدمة ، وسمعة الجهة التي تقوم الخدمة . ولهذه الأسباب تأتي بعض الجهود في مجال بحوث العمليات لتقدم طريقة منهجية لدراسة هذه الظاهرة .

وقد يبادر البعض إلي القول بأن الأعتماد علي الفهم العام والخبرة الفردية يمكن أن يستخدمها في حل هذه المشاكل دون الحاجة إلي نماذج رياضية قد تبدوا معقدة . ولكن الاجابة علي ذلك تكمن في درجة الدقة في قياس الظاهرة . فلا يمكن الحديث عن ظاهرة

صفوفو الانتظاردون الحديث عن وجود نوع من عدم الاستقرار والتغير Variabitity في الظاهرة التى تقوم بدراستها . فلا يمكن التقطع بأن عدد السيارات التي تمر من اشارة مرور معينة خلال فترة زمنية معينة يكون ثابتا بشكل يمكن من التنبؤ به أو افتراض ثباته . فواقع الحال أن هذا الرقم يتغير تبعاً لبعض المتغيرات الأخري . والأعتماد علي المتوسطات فقط في هذه الحالة يعد تجاهلاً ذلك التغير ولشكل تدفق السيارات وهو ما نطلق عليه شكل التوزيع الاحصائي لعملية تدفق السيارات. فمثل هذه الظواهر تعد ظاهرة لها شق عشوائي random Process وتنبني النماذج التي تعالج هذه الظاهرة علي دراسة دقيقة لأنواع التوزيعات الاحصائية التي تخضع لها ظاهرة الطلب علي الخدمة وعملية تقديم الخدمة بشكل يمكن من الفهم المتعمق والأكثر دقة لظاهرة الصفوف وبالتالي امكانية علاجها بشكل أكثر واقعية .

وتجدر الأشارة هنا إلي أن ظاهرة الانتظار قد لا تأخذ الشكل التقليدي الملموس للطابور . خذ علي سبيل المثال أحد الفنيين المسئول عن صيانة واصلاح مجموع من الآلات فعندما تتعطل الآلة فهي في وضع انتظار لحين وصول الفني وقيامة بالاصلاح وبالتالي إذا تعطل عدد من الآلات فيمكننا القول بأنهم في شكل طابور ينتظر قيام الفني بالأصلاح كذلك أيضا إذا كان هناك شبكة تليفونية مكونة من مجموعة من الخطوط تخدم العديد من النزلاء كما هو الحال في الفنادق والقرى السياحية) فإن محاولة أحد النزلاء طلب الخط عن طريق الضغط علي الرقم (٩) وعدم النجاح في الحصول علي الخط يمثل عملية انتظار . ويمكن أن نتخيل أن هناك طابور من النزلاء

يحاول الوصول إلي الخط . ومثال ذلك أيضا شبكات الكمومبيوتر التي تستخدمها أكثر من فرد وكذلك الآلات الصناعية التى تستخدم في تشغيل العديد من الأوامر الانتاجية .

ففي المشروعات التي تقوم بانتاج سلع مختلفة المواصفات علي نفس الوحدة الانتاجية ، ومثال ذلك صناعة الأثاث وورش الحدادة . وهناك أوامر ترد الي الورشة ولكل أمر أو طلبية Order مواصفات متينة من حيث التصميم والمقاسات والخامات والدهان وفي غالب الأحيان يتم استخدام نفس الآلة أو نفس القيم أو نفس العامل في انجاز أكثر من أمر . ويعني ذلك ببساطة أنه إذا لم تكن الآلة الخاصة بتقطيع الأخشاب (المنشار) متاحة بسبب استخدامها فى أوامر أخري فإن الأمر يجب أن ينتظر لحين انتهاء الآلة من الأمر الأول . فإذا كان لدينا أكثر من أمر فيجب أن ينتظروا جميعاً وكأنهم في شكل صفاً للانتظار أو طابور .

وينبني علي هذا التعميم لظاهرة صفوف الانتظار أن النماذج الرياضية لصفوف الانتظار تستخدم في الحياة العملية وفي البيئة الصناعية في عملية تخطيط الطاقة الانتاجية للوحدات التي تقدم الخدمة أو تصنع الأمر الانتاجي . فمن الأهمية بمكان تحديد عدد الموظفين علي الشباك اللازمين للتعامل مع الجمهور في أحد البنوك بشكل يضمن عدم الانتظار غير المقبول من قبل العميل وكذلك عدم ضياع موارد البنك ووجود عمالة عاطلة كذلك أيضا من المطلوب تحديد عدد الفنين اللازمين لصيانة عدد معين من الآلات بل وعدد ساعات العمل بالنسبة لهم . كما تستخدم نماذج صفوف الانتظار في تحديد العدد الملائم من الآلات وطاقة كل الة في حالة انتاج الأوامر .

نظرية صفوف الانتظار

تختص نظرية صفوف الانتظار بوضع الأساليب الرياضية اللازمة لحل المشاكل المتعلقة بتراكم صفوف الواحدات التى تنتظر دورها طلباً لخدمة معينة تؤدي لكل وحدة خلال فترة زمنية معينة . علي أن يكون وصول هذه الوحدات الي مكان أداء الخدمة عشوائيا تبعاً لتوزيع معين ، كما أن الزمن اللازم لأداء الخدمة لكل وحدة يمكن أن يكون العقبة عشوائية وتبقاً لتويزع معين وتقدم النظرية قياسا لقدرة مركز خدمة معين علي تحقيق الغرض الذي انشأ من أجلة. ويكون ذلك عن طريق القياس الرياضى الدقيق لمتوسط وقت الانتظار للحصول علي الخدمة ،وكذلك متوسط عدد المنتظرين للحصول علي الخدمة ، وعلى ذلك يمكن القول أن تلك النظرية تقدم بطريقة رياضية أسلوباً لتقييم بدائل التصميم المختلفة لمركز تقديم الخدمــات .

وقد ظهرت بدايات دراسة هذه النظرية علي يد عالم الرياضة الدانمراكي A.K. Erlang وذلك في دراسته المنشورة عام ١٩١٣ والخاصة بدراسة وقت الانتظار في خدمة المكالمات التليفونية والذي يرجع إلي التباين في الطلب علي تلك الخدمة .

"Analysis of Telephone Service delays due to Varying demands"

وبذلك فإن نظرية صفوف الانتظار تعد من أقدم أساليب علم الادارة والتي اتسع استخدامها لحل العديد من المشاكل العملية منذ هذا التاريخ . فلم يعد استخدامها قاصراً علي تقديم الخدمات والعمليات الصناعية ولكن امتد وبشكل متعمق إلى الاستخدامات العسكرية منذ الحرب العالمية الثانية . ومن أهم الأمثلة على المجالات

العسكرية التى تستخدم بها نظرية صفوف الانتظار ما يلى: (*) .

١ ـ جميع المسائل المتعلقة بالتخطيط الأمثل لانشاء منظومات أداء الخدمات مثل : ورش الصيانة والاصلاح ، منظومات الشئون الادارية وامداد القوات ،منظومات الرعاية الطبية والصحية ، منظومات الأرصفة بالموانى .

٢ ـ المسائل المتعلقة بدفع القوات إلي ساحة القتال ، وهنا تظهر أهمية هذه النظرية في تقييم مدي جودة منظومات ارسال وتداول المعلومات عن الموقف ، خاصة عند استخدام المنظومات الآلية في هذا المجال .

٣ ـ المسائل المتعلقة بوضع الخطط لمراحل الأعمال القتالية المختلفة ، فعلي سبيل المثال عند تنظيم الدفاع الجوي يمكن النظر لمراحل الضرب علي الأهداف الجوية (الطائرات) على أنها مراحل لتقديم الخدمات . كما يمكن النظر لعملية ظهور النبضات التي تمثل الأهداف الجوية المعادية على شاشة الرادار علي أنها وحدات تصل طلباً لأداء الخدمات لها . عندئذ يمكن استخدام نظرية صفوف الانتظار لتحديد القدرات الفعلية لمنظومة الدفاع الجوي هذه ، وذلك باختيار معيار مناسب لقياس فاعليتها عند اجراء الحسابات مثل « النسبة المئوية لعدد الأهداف الجوية التى لن تتمكن المنظومة من تدميرها .

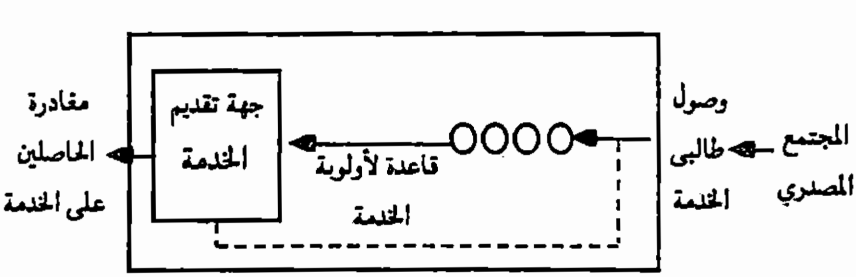
---

* من بحث مقدم فى الدراسة التمهيدية لماجستير ادارة الأعمال للطالب / لواء عادل محمود عزت عياد جامعة الاسكندرية ١٩٨٧ .

٤ ـ جميع المسائل المتعلقة بانشاءات الدفاعات المختلفة وتقييم مدي فاعليتها ، مثل المسائل المتعلقة بحساب العدد الأمثل لبطاريات الدفاع الجوي أو الدفاع الأرضى أو الدفاع الساحلي التي يجب انشاؤها للدفاع عن قطاع معين أؤ عن هدف حيوي معين ، بحيث تعطي الفعالية المطلوبة بأقل تكلفة ممكنة (التكلفة هنا تكون متمثلة في البطاريات الزائدة عن الحاجة) .

ويهمنا عن هذه المرحلة تقديم وصفاً للمكنات الأساسية للحالة التي تعالجها نظرية صفرف الانتظار وذلك بغرض الاتفاق على معنى محدد لكل مصطلح سوف يتم ذكره فيما بعد ، وكذلك حتي يمكن تصور حالات الاختلاف العديدة التى يمكن أن تكون عليها مشكلة صفوف الانتظار .

يوضح الشكل التالي المكونات الأساسية لمشكلة صفوف الانتظار ، والذي يتضح منه وجود ستة مكونات أساسية في هذا النظام وهي :



أولاً : المجتمع المصدري Calling Populatian : وهو عبارة عن كل الوحدات التي يمكن أن تتقدم طالبة الحصول علي الخدمة .

فبالنسبة لاحدي محطات البنزين يكون المجتمع المصدري هو كل السيارات التي تمر عن الطريق الموجودة به تلك المحطة ، وبالنسبة لعملية صيانة عدة آلات يكون كل عدد الآلات المسئول عنها اخصائي الصيانة هو المجتمع المصدري له وبالنسبة للإستاذ الذي يقوم باعطاء احدي المحاظرات لطلبته في احدي قاعات الدرس يكون كل عدد الطلاب الموجود بالقاعة هو المجتمع المصدري بالنسبة لعملية سؤال أحد الأسئلة اثناء المحاضرة .

يتضح من تلك الأمثلة أن هناك نوعان من المجتمع المصدري الذي يتكون من المفردات التي يمكن أن تطلب الحصول علي الخدمة وهما:

(أ) مجتمع مصدري حجمة كبير جداً إلي درجة غير محدودة ، ولذلك يطلق عليه مجتمع لانهائي الحجم infinite Population ومثال ذلك عدد السيارات المارة علي أحد محطات الخدمة .

(ب)مجتمع مصدري حجمة صغير ومحدد العدد. ولذلك يطلق عليه مجتمع محددو الحجم finite Population ومثال ذلك عدد الآلات المسئول عنها أحد عمال الصيانة وعدد الطلاب في قاعة الدرس .

ويعتبر هذا التمييز أساسي في أنه سوف يؤثر علي احتمال طلب الخدمة بعد أن تتقدم وحدة أو عدة وحدات بطلب الخدمة والحصول عليها فعلاً . ففي حالة المجتمع المصدري المحدود بمجرد أن تطلب أحد الوحدات الخدمة يتأثر احتمال طلب الخدمة من قبل أي وحدة في العدد الباقي من الوحدات . وذلك عكس حالة المجتمع المصدري اللانهائى نظراً لكبر حجم المجتمع وبالتالي يكون لذلك تأثيراً واضحاً علي

الاسلوب الرياضي الواجب اتباعه نظراً لاختلاف التوزيع الاحصائى الاحتمالي الواجب استخدامة .

(٢) وصول طالبى الخدمة Arrivals : وهو عبارة عن التقدم الفعلي لأي من هذا المجتمع المصدري طالبة الخدمة وقد تكون هذه الوحدة فرد ، آله ، سيارة ... الخ وهنا أيضا يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من شكل وصول طالبى الخدمة :

(أ) معدل وصول بناءاً على معدل ثابت Canstant rate ، كأن يكون معدل فحص أحد الآلات كل ثلاثة أيام أو أن معدل وصول المادة الخام إلي أحد محطات .

ثانياً : وصول طالبي الخدمة Arrival : وهو عبارة عن التقدم الفعلي لأي وحدة من هذا المجتمع المصدري بقصد الحصول على الخدمة. وتختلف خاصة الوصول هذه من عدة جوانب أساسية هى : درجة التحكم فى عملية الوصول ، عدد الوحدات التي تتقدم طالبة للخدمة، والتوزيع الاحتمالي لعملية الوصول ، بالاضافة الى درجة قبول الوحدات لعملية الانتظار . وسوف نتناول كل منها بالايضاح .

(أ) درجة التحكم في عملية الوصول .. ويقصد بذلك مدي امكانية النظام على التحكم في حجم التدفق للوحدات (أو الأفراد) طالبة الخدمة فعندما يكون للمنشأة بعض السياسات التى تؤثر فى حجم هذا التدفق خلال فترات زمنية معينة تعتبر عملية التدفق يمكن التحكم فيها Controllable ومثال ذلك تخفيضات الأسعار خلال فترة الأوكازيون والتى من شأنها أن ترفع معدل التدفق . كذلك فإن تحديد ساعات معينة للعمل من شأنه أن يرفع التدفق خلال تلك

الساعات وعلي صعيد آخر فإن رفع الأتعاب التي يتقاضاها بعض الأطباء قد يكون الوسيلة لتخفيض تدفق الطالبين للخدمة لديهم .

إما الشكل الآخر من نظم تقديم الخدمات فهو النظام الذي لا يتحكم Uncantrollable في التدفق علي الخدمة التى يقدمها. ومن المعروف أن هذه هي الحالة الأكثر شيوعاً فى الحياة العملية.فمن المعروف أن عملية التدفق تخضع إلي العديد من العوامل التي غالباً لا يكون للنظام قدره علي التحكم فيها وأن كان يمكنة التأثير إلي حد ما عليها .

(٢) عدد الوحدات التي تتقدم طالبة للخدمة ، ويقصد بذلك عدد الوحدات مجتمعة التي تتقدم للخدمة . فعندما يتقدم الطلبة لمكتب التسجيل في الجامعة فإنهم يتقدمون فرداً فرداً Single arrival. وقد تكون وحدة التعامل في بعض النظم مكونة من أكثر من وحدة . وفى هذه الحالة تعامل وحدة التعامل هذه علي أنها أيضا وصول فردي Single arrival. فعندما يتم التعامل في سوق الأوراق المالية غالبا ما يكون حجم التعامل هو عشرة أسهم مجتمعة .ومن ناحية أخري فإن طالبي الخدمة قد يكونوا في شكل مجموعة batch arrival كما هو الحال في مطاعم الأكلات السريعة التى عادة ما يذهب اليها مجموعة من الأفراد معاً،ثم بعد ذلك يكون مطلوب خدمة كل منهم على حدة

(٣) التوزيع الاحتمالي لعملية الوصول .. ويقصد بذلك معدل وصول الوحدات طالبة الخدمة وهنا يمكن التمييز بين نوعين أساسيين من شكل وصول طالبي الخدمة :

(أ) معدل وصول بناءاً على معدل ثابتConstant rate ويقصد

بذلك أن تكون الفترة التي تنقضي بين وصول وحدة طالبة للخدمة والوحدة التي تليها فترة ثابته ، وبالتالي فإن التباين Variance بين تلك الفترات يساوي صفر . ومثال ذلك أن معدل فحص أحد الألات كل ثلاثة أيام أو أن يكون معدل وصول المادة الخام الي محطات التشغيل في خط الانتاج كل فترة زمنية ثابته . وعلى الرغم من وجود هذه الأمثلة المحددة إلا أنه من الصعب وجود معدل ثابت لطلبة الخدمة فى الحياة العملية لصفة عامة .

(ب) معدل وصول بناء على معدل متغير Variable وباحتمال عشوائى random rate ومثال ذلك معدل وصول السيارات الى أحدي محطات الخدمة والذي عادة ما يكون فى شكل غير ثابت.فمن الممكن أن تكون الفترة بين وصول السيارات الأولي والثانية خمسة دقائق وفي نفس الوقت تكون الفترة بين وصول السيارة الثانية والثالثة دقيقتين فقط .وفي هذه الحالة يمكن دارسة الظاهرة والتوصل إلي شكل من أشكال التوزيعات الاحتمالية Probability distributions التي تمثل تقريبا وصفاً لظاهرة الوصول . وسوف نتناول فيما بعد بشئ من التفصيل ـ أهم التوزيعات الاحصائية التى يمكن أن تستخدم في هذا المجال .

(٤) درجة قبول طالبي الخدمة للانتظار . وهنا يمكن أن يكون أمامنا نوعان من الحالات . أما الحالة الأولي فهي الحالة التى يكون فيها طالب الخدمة مستعداً للإنتظار طويلاً للإنتظار طويلاً في الطابور حتي تصبح وحدة تقديم الخدمة جاهزة لتصريح الخدمة له . وعادة ما يوصف هذا الشخص بأنة صبور Parient arrival.أما الحالة الثانية

فهي حالة عدم الرغبة في الانتظار ولكن بدرجات مختلفة Impatient arrivals وتضم هذه الحالة الأخيرة مجموعتين من العملاء أما المجموعة الأولى فهي تلك التى تأخذ قرارها بمجرد النظر الى طول صف الانتظار ووحدة تقديم الخدمة . ومن ناحية أخرى فإن المجموعة الثانية هي التي تنضم فعلا إلى الطابور ثم بعد فترة من الانتظار تغادر الطابور .

ثالثاً : الطابور (صف الانتظار Waiting line) :

حينما تتقدم الوحدة طالبة للخدمة وتكون جهة تقديم الخدمة غير مشغولة فإنه لا يحدث تشكيلا لما يسمى بالطابور أو صف الأنتظار (وميثل ذلك الخط الغير متصل في الشكل) إما إذا كانت جهة تقديم الخدمة مشغولة بتقديم الخدمة لوحدة أخري وكان هناك أكثر من شخص طالبي الخدمة فى ذات الوقت فإنه لا بد من تشكيل طابور الانتظار . وعلى الرغم من أن وجود الطابور يعبر عن الاستخدام الفعال لجهة تقديم الخدمة إلا أنه عادة ما يكون غير مرغوب من وجهة نظر طالب الخدمة . كذلك فإنه أيضا كثيراً ما لا يكون مرغوباً من وجهة نظر المنشأة ذاتها . ففي كثير من الحـــالات (مثل محلات تقديم السندوتشات والوجبات السريعة) يكون تخفيض وقت انتظار العميل في الصف أحد العناصر التنافسية الأساسية للمشروع وتختلف صفوف الانتظار من حيث الطول والعدد.

(١) طول الصف : وهنا أيضاً يمكننا أن نميز بين نوعان من صفوف الانتظار :

(أ) الطابور ذو الطول المحدد Finite Waiting Iine Length :

وهو الذى يكون له حداً أقصى لا يمكن تجاوزة ، ويكون ذلك في غالبية الأحوال بسبب التسهيلات المتاحة لانتظار الوحدات طالبة الخدمة . ومثال ذلك عدد المقاعد المتاح للانتظار فى صالون الحلاقة وكذلك تلك المتاحة في عيادة أحد الأطباء ، أو المساحة المتاحة لانتظار السيارات فى أحد محطات تقديم الخدمة . كذلك فإن الطول لمحدد للطابور قد يرجع الي سلوك المستهلك ذاته . فإذا رأي المستهلك أن الطابور الذي يتكون من أربعة سيارات على الأكثر فى أحد المحطات لا يستحق الانضمام اليه ، أصبح النظام الذي أمامنا طابور ذو طول محدود .

(ب) الطابور غير محدد الطول Infinite Waiting Line Length

: وهو الذي لا يكون له حداً أقصي ويمكن نظرياً أن يصل إلى مالا نهاية ومثال ذلك عدد العملاء الراغبين في دفع قيمة مشترواتهم فى أحد المحلات التجارية الكبري وخصوصاً فى فترة الأوكازيون .

وعلي الرغم من أنه المعالجة الرياضية لحالة الطابور غير المحدود تكون أسهل نسبياً إلا أنه من الناحية العملية تكون حالة الطابور المحدود هي الأكثر واقعيـة وتحتاج الي معالجة رياضية خاصة .

(٢) عدد الصفوف : وهنا يكن التمييز بين حالتين هما :

(أ) حالة الصف الواحد Sinle line : وهي الحالة التي يكون فيها تقديم الخدمة عن طريق منفذ واحد . ومثال ذلك أن يمر جميع الطلاب على أحد اساتذة المادة فى شكل امتحان شفهي ، أو انتظار جميع المرضى فى عيادة أحد الأطباء بقصد اتمام الفحص الطبى.

(ب) حالة الصفوف المتعددة Multiple lines : وهي إما الحالة التي يكون فيها تقديم نفس الخدمة عن طريق عدة منافذ ، كما هو الحال في التقدم لوحدات الجوازات عند السفر في المطارات ، أو الحالة التى يكون فيها صف واحد ويكن عند نقطة معينة يكون أمام طالب الخدمة أكثر من وحدة لتقديم الخدمة .

رابعاً : قاعدة لأولية الخدمة : ويقصد بذلك القاعدة (أو مجموعة القواعد) التى يتم على أساسها تقرير أولوية تقديم الخدمة للمنتظرين فى الصف ، ويطلق على ذلك قاعدة الأولوية queue discipline وسوف يتضح فيما بعد أن اختيار قاعدة معينة سوف يؤثر بشكل مباشرة على أداء النظام من جوانب متعددة .

وهناك العديد من القواعد التى يمكن أن تستخدم فى هذا الصدد ومنها :

(أ)الذي يصل أولاً في الطابور يخدم أولاً (وهي أكثر القواعد شيوعا

(ب) الذي يحتاج الى أقل وقت خدمة أولاً .

(جـ) الذي يقوم بالحجز أولاً يخدم أولاً .

(د) الحالات الطارئة أولاً .

(هـ) العملاء الذين يدرون ربحاً أكثر للمنشأة أولاً .

(و) العملاء الذين يطلبون أكثر أولاً .

(ح) العملاء الذين يقترب موعد تسليمهم أكثر أولاً .

وفي الحياة العملية قد يتم تخصيص منافذ معينة لمجموعة من العملاء وذلك لتحقيق اى من القواعد السابقة . ومثال ذلك وجود

منافذ لبيع تذاكر الدرجة الأولى في السكك الحديدية ، ومنافذ للجمهور الذي يتسوق عدد محدود من السلع في المتاجر الكبري .

خامساً : وحدة تقديم الخدمة Service Facility : وهنا يمكن أن يختلف هيكل نظام تقديم الخدمة من حيث عدد منافذ Channels ومراحل Phases تقديم الخدمة . كما أنه قد يختلف من حيث معدل تقديم الخدمة ذاته . وسوف نتناول كل منهم بالايضاح .

(١) هيكل نظام تقديم الخدمة : وهنا يمكن أن يواجهها عدة بدائل :

(أ) منفذ واحد ومرحلة واحده Single Channel, Single Phase

وهي الحالة التى يقوم بتقديم الخدمة فيها جهة واحدة ينتظرها جميع الموجودين في الصف وبعد اتمام تقديم الخدمة يغادر الفرد النظام بالكامل. ومثال ذلك زيارة أحد الأطباء أو صالونات الحلاقة الصغيرة التي يعمل فيها فرد واحد فقط . وتعد هذه أسهل حالات المعالجة الرياضية كما سنري .

(ب) منفذ واحد ومراحل متعددة Single Channel Muitiphase

وهي الحالة التى يتولى تقديم الخدمة فيها جهة واحدة ولكن يمر العميل على اكثر من مرحلة متتالية لاتمام الخدمة . ومثال ذلك عملية صرف مبلغ من المال من حساب التوفير فى أحد البنوك والتي عادة ما تبدأ بشباك معين واحد ثم يليها الصراف المسئول عن اعطاء النقدية . كذلك فإنه الحصول على أحد الوجبات فى كافتيريا المدينة الجامعية يعد مثالاً جيداً علي تلك الحالة . أما في مجال الصناعة فإن ترتيب التسهيلات الانتاجية فى شكل خط انتاج Assembly Line ، كما فى

صناعة السيارات ، يمثل حالة أخري من حالات المنفذ الواحد والمراحل المتعددة .

(جـ) منافذ متعددة ومرحلة واحدة Multichannel Singlphase .

وهي الحالة التي يكن هناك العديد من المنافذ التى تقدم نفس الخدمة والتي بمجرد أن يحصل عليها العميل يغادر النظام كلية بمعني أنه يسعي الي الحصول علي خدمة واحدة وليست مجموعة متتالية من الخدمات. وتعد حالة البنوك التي لها أكثر من شباك لتقديم نفس الخدمة (أو نوع الخدمات) مثالاً جيداً على ذلك . كذلك فإن وجود أكثر من صراف لتحصيل الرسوم الدراسية من الطلاب يعبر عن هذه الحالة أيضا . ومن الأمثلة الأخري الملموسة وجود أكثر من مضخة لتقديم البنزين في أحد محطات البنزين ووجود أكثر من موظفة حجز في مكتب شركة طيران .

وتعد المشكلة الاساسية في هذا النوع من النظم هو احتمال اختلاف وقت انتظار الأفراد في الصفوف المختلفة بشكل ملحوظ وعلاوة على أنه ذلك قد يعبر عن نوع من عدم العدل فإنه قد يدفع الأفراد إلي المحاولة الدائمة للتنقل بين الصفوف المختلفة .ولذلك فعادة ما يتم عمل صف واحد وعند نقطة معينة يتقدم طالب الخدمة لجهة تقديم الخدمة المتاحة أو أن يتم اعطاء ارقام للعملاء حسب وصولهم ويتم تخصيصهم بالترتيب علي مراكز الخدمة عندما تكون متاحة .

(د) منافذ متعدة ومراحل متعددة Multichannel Multiphase

وهي الحالة الأكثر تعقيداً عندما يكون هناك أكثر من وحدة لتقديم

نفس الخدمة ولكن طالب الخدمة يسعي إلى الحصول علي عدة خدمات متتالية . ففى بعض محطات تقديم الخدمة للسيارات عادة ما يكون هناك أكثر من مضخة لتقديم البنزين كما أن هناك أكثر من وحدة لضخ الهواء اللازم للإطارات فبالنسبة للعملاء الذين يرغبون في الحصول علي كل من الخدمتين يكون أمامهم أكثر من منفذ في مرحلتين متتاليتين ولذلك فإنه يمكن خدمة أكثر من سيارة من هذه المجموعة في ذات الوقت .

(هـ) التصميم المختلط Mixed وهو عبارة عن التصميم الذي يوجد به أي من الخصائص السابقة في مرحلة معينة ثم يتغير هذا الهيكل في المرحلة التالية من احتمال تغيره مرة أخريي وهكذا ومثال ذلك أن يكون هناك أكثر من منفذ تصب جميعها في منفذ واحد لتقديم خدمة واحدة (مثل اندماج أكثر من فرع من الطريق في مدخل أحد الكباري (أو أكثر من منفذ يصبون جميعاً في منفذ واحد لتقديم عدة خدمات متتالية (ومثال ذلك نقط عبور الحدود بين الدول أو التي عادة ما تتضمن أكثر من مرحلة متتالية) .

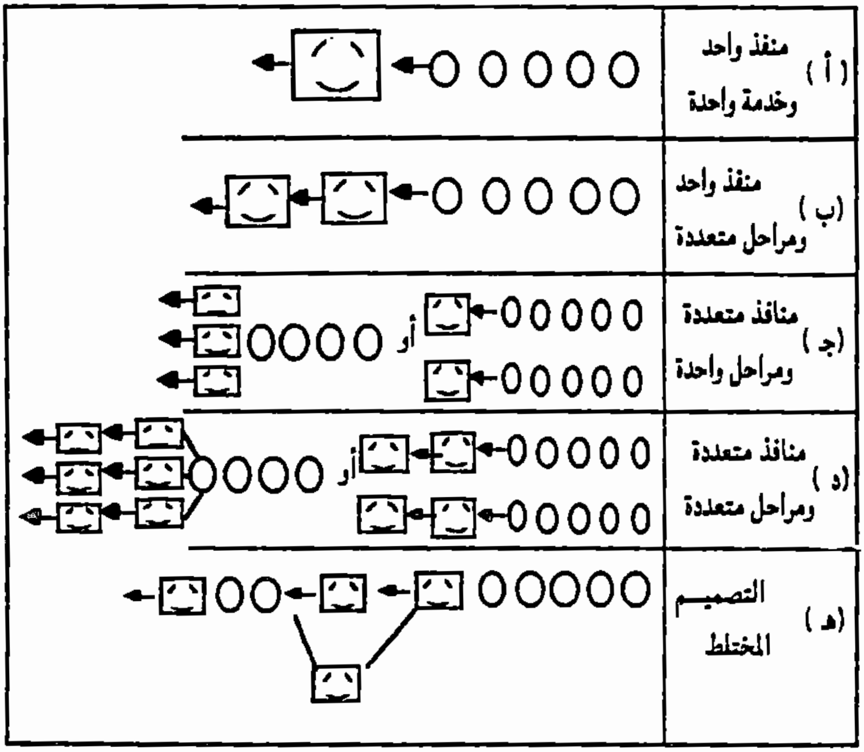
كذلك فإن حالة التصميم المختلط تتضمن حالة أن يكون هناك أكثر من منفذ وأكثر من خدمة متتالية على أن يتغير عدد المنافذ أو عدد الخدمات اللازمة (أو كليهما) عند كل نقطة ، أضف إلى ذلك الحالة الأكثر تعقيداً وهى ألا يكون هناك شكل معين للتدفق يربط بين تلك المراحل المختلفة (ومثال ذلك حالة انتاج الأوامر والطلبيات حيث يتوقف الأمر علي الخصائص الانتاجية لكل أمر انتاجى).

ويتضمن الشكل التالي ( ) تعبيراً عن تلك الحالات المختلفة

(٢) معدل تقديم الخدمة Service rate: ويقصد بذلك المعدل الذي يتم به تقديم الخدمة ودرجة التباين بين الوقت اللازم لتقديم الخدمة للعملاء وهنا ، كما هو الحال فى عملية الوصول ، يمكن التمييز بين نوعني أساسيين هما :

(أ) معدل ثابت Constant rate : لتقديم الخدمة ، ويقصد بذلك أن تكون الفترة الزمنية اللازمة لتقديم الخدمة لكل الوحدات متساوية تماما وبالتالي فإن التباين يعادل صفر ، وتعد هذه حالة نظرية إلى حد كبير ، ولكن يمكن الاعتماد عليها عند استخدام الآلية الكاملة والدقيقة في تقديم الخدمة .

(ب) معدل متغير Variable rate لتقديم الخدمة وهذه هي الحالة الأكثر واقعية نظراً لاختلاف مواصفات الخدمة ونوعية العميل ، بل وتغير كفاءة القائمين بتقديم الخدمة مع مرور الوقت . وفي هذه الحالة يتوقع أن يكون تباين الوقت قيمة موجبة ويمكن الاعتماد علي بعض أشكال التوزيعات الاحتمالية التي تمثل وصفاً تقريبياً لفترة تقديم الخدمة وسوف نتناول فيما بعد أهم هذه التوزيعات بشئ من الايضـــاح .



شكل (   )

سادساً : المغادرة للنظام Departures : من المفترض أنه عندما يتم حصول الوحدة علي الخدمة (أو مجموعة الخدمات) التي ترغبها فإنها سوف تترك النظام وتخرج منه . ولكن في بعض الحالات العملية قد تعود الوحدة مرة أخري إلي النظام طالبة للخدمة مرة أخري ومثال ذلك العودة إلي الأطباء مرة أخري أو اعادة الآلة نظراً لتوقفها مرة أخري بعد أصلاحها . وعلي الرغم من أنه من الممكن اعتبار هذه وحدات جديدة تنضم الي الطابور الموجود فعلاً وبشكل يخضع لنفس التوزيع الاحتمالي المفترض أصلا عن معدل الوصول لطلب الخدمة إلا

أن ذلك يعد صحيحاً فقط في حالة المجتمع المصدري اللانهائي والغير محدود . أما إذا كان المجتمع المصدري محدود فإن احتمال عودة وحدة من التى تم تقديم خدمة لها إلي النظام يجب أن يعامل بشكل خاص رياضياً نظراً لتأثيرها الكبير بالنبسة لحجم المجتمع المصدري .

سابعاً : التوزيعات الإحتمالية الخاصة بعملية الوصول لطلب الخدمة

أشرنا من قبل إلي أن عملية الوصول بهدف طلب الحصول علي الخدمة عادة ما تكون في شكل عشوائي يمكن الإعتماد علي بعض التوزيعات الإحتمالية في وصفه . ويمكن النظر إلي عملية الوصول هذه من زاويتين مختلفتين عند وصفها . أما الزواية الأولي فهي الإهتمام بعدد الأشخاص (أو الأحداث) الذين يصلوا خلال وحدة زمنية طالبين الخدمة . ومثال ذلك عدد المرض الذين يصلون إلي المستشفي خلال الساعة ، أو عدد السيارات التي تصل إلي إشارة مرور معينة خلال الدقيقة . وتعني تلك الأمثلة أن المتغير العشوائي random variable الذي يتم دراسته هو العدد (الصحيح) خلال فترة ثابتة ، ولكن هذا العدد نفسه متغير . ومن أهم تلك التوزيعات الإحتمالية التي عادة ما تستخدم في وصف تلك الظاهرة التوزيع الإحتمالي البواسوني Poisson distribution . وترجع هذه التسمية إلي العالم الرياضي الفرنسي Simeon D. Poisson الذي قدم هذا التوزيع في العقد الرابع من القرن الثامن عشر .

(أ) توزيع بواسون Poisson distribution

حتي يمكن وضع تعريف دقيق لهذا النوع من التوزيع Poisson دعنا نفترض أن لدينا عملية تنطوي علي أحداث (تعطل آلة ، وصول سيارة ، إتصالات تليفونية) يتم حدوثها عشوائياً خلال فترة زمنية معينة (ولتكن دقيقة وذلك بوسط حسابي قدره λ ، وأن الشروط التالية صحيحة :

(١) عدد مرات ظهور هذا الحدث (تعطل آلة ، وصول سيارة ، إتصال تليفون) في خلال فترة زمنية معينة يعد مستقلاً (غير متأثراً) عن عدد مرات ظهور هذا الحدث في خلال أي فترة زمنية أخري .

(٢) أن إحتمال حدوث هذا الحدث (تعطل الة ، وصول سيارة، إتصال تليفوني) في خلال الجزء الصغير (ولتكن ثانية) من تلك الفترة الأكبر (ولتكن دقيقة) يكون صغيراً ، ويتناسب هذا الإحتمال مع نسبة ذلك الجزء الصغير إلي تلك الفترة الأكبر .

(٣) إن إحتمال حدوث هذا الحدث لمرتين أو أكثر خلال الجزء الصغير من الفترة الأكبر يكون قيمة محدودة جداً يمكن إهمالها تصل إلي الصفر .

فإذا تحققت هذه الشروط فإنه يمكن حساب إحتمال حدوث هذا الحدث لعدد X من المرات حيث

$$X = 0,1,2,\ldots, 1,\infty$$

بإستخدام معادلة التوزيع البواسوني التالية :

$$P(x) = \frac{e^{-\lambda}(\lambda)^{x}}{X!}$$

(وذلك علي أساس أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي للأعداد وقيمتها حوالي ٢.٧١٨)

دعنا الآن نقوم بتطبيق الفكرة الأساسية للتوزيع الأسي علي مثال واقعي وهو عدد المكالمات التليفونية التي تصل إلي أحد المحلات خلال فترة خمسة دقائق . فإذا إفترضنا أنها تحقق الشروط التالية :

(١) عدد المكالمات التي تصل إلي هذا المحل خلال أي ثانية خلال تلك الدقائق الخمس يعد مستقلاً عن عدد المكالمات التي تصل إلي المحل خلال أي ثانية أخري .

(٢) إحتمال حدوث مكالمة خلال ثانية واحدة صغير جداً ويتناسب مع علاقة الثانية بالخمسة دقائق .

(٣) إحتمال حدوث مكالمتين أو أكثر خلال ثانية واحدة يقترب من الصفر .

فإنه يمكن إستخدام التوزيع البواسوني لحساب إحتمال حدوث عدد صفر ، ١ ، ٢ ، ٣ ، . . . . ∞ من المكالمات .

مثـال :

بإفتراض أن متوسط عدد المكالمات المتوقعة خلال خمسة دقائق هو ٢ مكالمة وأن توزيع الكالمات خلال تلك الفترة يحقق شروط التوزيع الأسي أحسب (أ) إحتمال أن يكون عدد المكالمات خلال الخمسة دقائق التالية هو ثلاثة مكالمات .

$$P(x=3) = \frac{e^{-2}(2)^3}{3!}$$

$$= .1804$$

(ب) إحتمال أن يكون عدد المكالمات خلال الخمسة دقائق التالية هو مكالمة واحدة فقط .

$$P(x=1) = \frac{e^{-2}(2)^1}{1!} = .2707$$

(جـ) إحتمال ألا تحدث مكالمات خلال الخمسة دقائق التالية .

$$P(x=0) = \frac{e^{-2}(2)^0}{0!} = .1353$$

ويمكن إستخدام جدول التوزيع البواسوني في الملحق للوصول إلي نفس النتائج دون الإعتماد علي المعادلة .

والسؤال الأن هو ، كيف يمكن إستخدام التوزيع الأسي إذا كان المطلوب هو حساب الإحتمالات المختلفة خلال فترة زمن أخري غير خمسة دقائق . طالما أن الإحتمال في التوزيع الأسي يتناسب مع طول الفترة الزمنية فإنه يمكن إستخدام المعادلة التالية :

$$P_T(x) = \frac{(\lambda T)^x e^{-\lambda T}}{X!}$$

وذلك علي أساس أن

T الفترة الزمنية التي يتم قياس الإحتمال خلالها

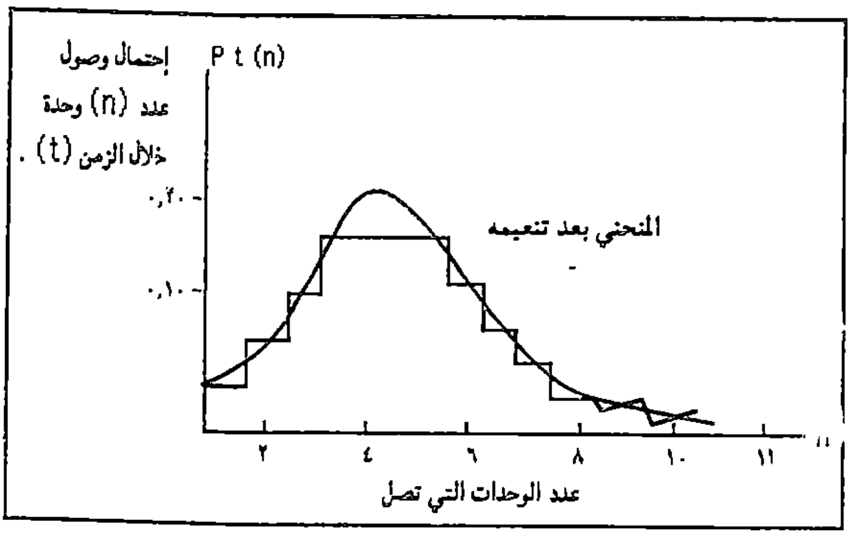
X عدد المرات التي يحدث فيها الحدث الذي نقوم برصده

$P_T(x)$ إحتمال ظهور الحدث لعدد X من المرات خلال الفترة T λ متوسط عدد المرات التي يظهر فيها الحدث خلال وحدة الزمن (يمكن النظر إلي الفترة الزمنية T علي أنها مكونة من عدة وحدات زمن)

e أساس اللوغاريتم الطبيعي للأعداد وقيمته ٢,٧١٨

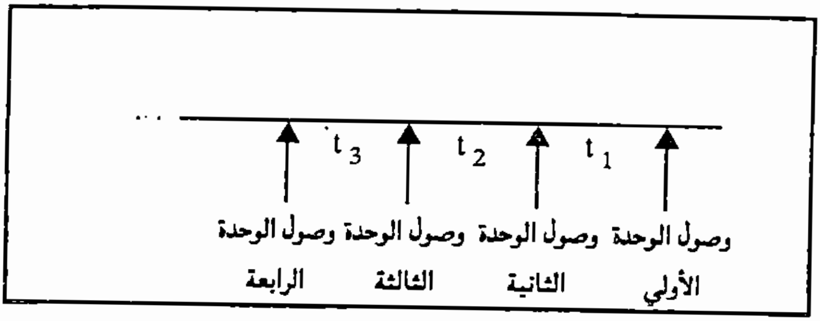
ويوضح الشكل اتالي التوزيع البواسوني عند حالة إفتراضية يكون فيها .

$\lambda T = 4$



توزيع بواسون لـ (λT = ٤)

أما الزاوية الأخري التي يمكن النظر منها إلي عملية وصول طالبي الخدمة فهي إعتبار أن المتغير العشوائي هو الوقت المنقضي بين حدوث الحدث (تعطل آلة ، أو وصول سيارة) . ويوضح الشكل التالي الحالة التي يكون فيها الزمن t بين الوحدات المتتالية الوصول زمناً متغيراً .



ومن الشائع إستخدام عدة توزيعات إحتمالية متصلة Continuous Probability distributions في تقريب وتفهم الوقت الذي ينقضي بين وصول وحدة والوحدة التي تليها . ومن أهم هذه التوزيعات الإحتمالية : التوزيع الأسي المتناقص negative exponential distribution ، توزيع إيرلانج Erlang distribution وسوف نتناولهما بشيء من الإيضاح .

(ب) التوزيع الأسي المتناقص Negative Exponetial Distribution

يوضح الشكل التالي التوزيع الأسي المتناقص وذلك علي أساس أن معادلة تقدير الإحتمال هي :

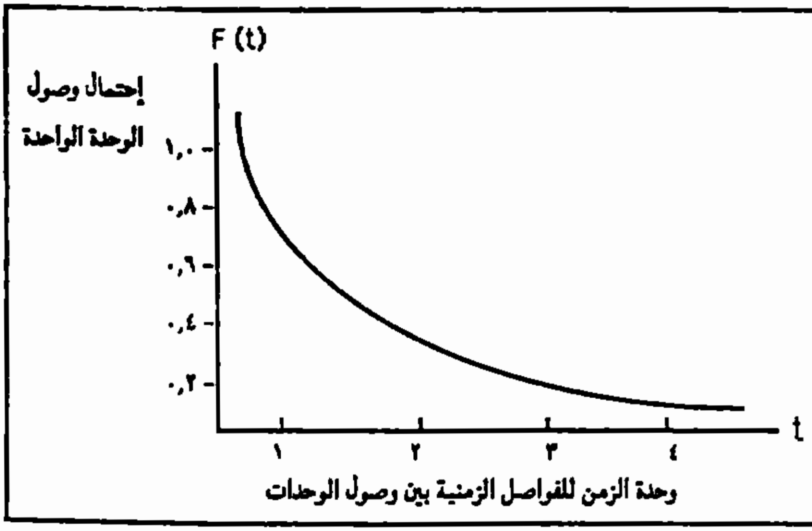
$$F(t) = ع\, e^{-عT}$$

حيث :

(t) إحتمال وصو الوحدة الواحدة خلال الزمن (T)

ع = كثافة وصول الوحدات (أي متوسط عدد الوحدات التي تصل طلباً للخدمة في وحدة الزمن) .

e = أساس اللوغاريتم الطبيعي ويساوي (٢,٧١٨)



التوزيع الأسي لـ ($\lambda e^{-\lambda T}$) حيث ($\lambda = 1$)

وغالباً ما يتم كتابة الإحتمال ($F(t)$) في الصورة (P_t) .

وهذه المعادلة للوحدات الفردية للوصول single arrivals توضح كما في الشكل أن الفواصل الزمنية الصغيرة بين الأصول أكثر إحتمالاً من الفواصل الزمنية الطويلة .

ويمكن إستخدام هذا المنحني بطريقتين :

(أ) لتوضيح المباشر لإحتمال أنه سيمر علي الأقل عدد (t) وحدات زمنية إلي حين الوصول التالي .

(ب) لحساب إحتمال أن يحدث الوصول التالي بعد الزمن (t) أو أقل ، وذلك

(جـ) توزيع إيرلانج : Erlang distribution

يطبق هذا النوع من التوزيع علي نوع من دوال الكثافة dencity functions التي تفيد في تمثيل عدد مختلف من توزيعات الفواصل الزمنية لوصول الوحدات . والصورة العامة لمعادلة توزيع إيرلانج كالآتي :

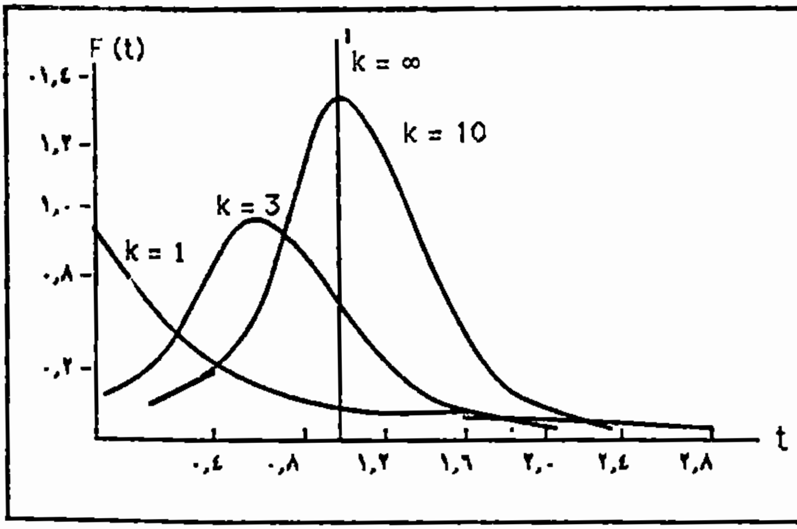
$$f(t) = \frac{k\lambda(k\lambda t)^{k-1} e^{-k\lambda t}}{(k-1)!}$$

كل هذه التوزيعات لها متوسط = $\frac{1}{\lambda}$ و تباين = $\frac{1}{\kappa h^2}$

ويلاحظ أن (k) في هذه المعادلة هي رقم صحيح موجب يستخدم لتميز بين التوزيعات المختلفة لإيرلانج . فإذا كان (k = 1) فتعبر عن توزيع إيرلانج من الدرجة الأولي ، وإذا كان (k = 2) فتعبر عن توزيع إيرلانج من الدرجة الثانية ، وهكذا .

وإعتماداً علي القيمة المختارة لـ (k) يمكن تشكيل التوزيع للتمثيل التقريبي للبيانات الفعلية التي يتم ملاحظتها . فإذا أخذنا النهايات المتطرفة لهذه المعادلة ، فنجد أنه عند (k = 1) فسيختصر الزمن الازم لملاحظة وصول الوحدة الواحدة إلي ($\lambda e^{-\lambda t}$) والتي هي في الواقع تساوي التوزيع الأسي .

وعندما تكون (k) كبيرة جداً يصبح التباين صفراً وهذا يعني أن الفاصل الزمني للوصول يصبح ثابتاً . والشكل رقم (٧) يوضح ذلك :



شكل رقم (٧) توزيع إيرلانج عند ($\lambda = 1$)

(د) التوزيع الأسي الزائد : Hyperex Ponential distributon

أوضحنا من قبل أن للتوزيع الأسي متوسط يساوي ($\frac{1}{\lambda}$) وتباين يساوي ($\frac{1}{\lambda^2}$) . ولتوزيع بواسون المتوسط = التباين = (λ) ، ولكن كثيراً ما يتصادف عملياً توزيعات لها نفس المتوسط ونفس التباين الخاص بالتوزيع الأسي وتوزيع بواسون ولكن يكون لها تغاير variability أكبر . عندئذ يستخدم التعبير « زائد hyper » ليقترن بإسم التوزيع .

تباين التوزيع الأسي الزائد يساوي :

$$\frac{j}{\lambda^2}$$

وتباين توزيع بواسون الزائد يساوي : J λ

حيث (j > 1) لأن لو كانت (j = 1) فسيعود التباين ليساوي التباين البسيط لتوزيع الأسي أو توزيع بواسون .

وعادة ما يكون التطبيق الدارج للتوزيع الأسي الزائد يكون علي أنظمة الخدمة المتعددة القنوات بمعدلات أسية مختلفة للخدمة . ويكون التوزيع الأسي الزائد الذي ينتج هو المتوسط الموزون we ghted aver-age لتوزيع الخدمة لكل قناة وإحتمال أن يتم تخصيص الوحدة التي تصل إلي هذه القناة .

(هـ) التوزيعات الأخري : Other distributions

عندما تختلف معظم توزيعات وصول الوحدات في الحياة الواقعية عن المعادلات الرياضية المذكورة هنا فسوف تنعكس درجة إختلافها علي دقة النتائج عند إستخدام هذه التوزيعات الرياضية لتمثيل ما يحدث في الحياة الواقعية .

وعندما يكون الإختلاف كبيراً ، أو عندما يتطلب الأمر دقة عالية فالبديل المنطقي عندئذ هو إستخدام أساليب المحاكاة simulation.

بطرح القيمة التي نقرأها علي المنحني من واحد صحيح .

والجدول التالي يوضح ذلك :

قيمة (t) بالدقائق	إحتمال أن يكون الوصول التالي خلال الزمن (t) أو أكثر. (تقرأ مباشرة من المنحني)	إحتمال أن يكون الوصول التالي خلال الزمن(t) أو أقل. [1 - F (t)]
صفر	١,٠	١ - ١,٠ = صفر
١	٠,٣٥	١ - ٠,٣٥ = ٠,٦٥
٢	٠,١٥	١ - ٠,١٥ = ٠,٨٥
٤	صفر	١ - صفر = ١,٠

ثامناً : معدل أداء الخدمة : Service rate

إن التعامل مع هذا المعدل يشابه التوزيع الرياضي الذي أشرنا إليه عند عرض التوزيعات الخاصة بوصول العملاء . ويمكن هنا أيضاً أن نميز بين حالة زمن الخدمة الثابت والتي تنطبق فقط علي العمليات الآلية أما الحالة الأخري الأكثر واقعية فهي حالة زمن الخدمة المتغير والذي يمكن أن يستخدم معها التوزيع الأسي ، وتوزيع إيرلانج والتوزيع الأسي الزائد ، وذلك لتعبير عن زمن أداء الخدمة .

وغالباً ما يستخدم توزيع إيرلانج مع حالة « منفذ واحد ، خدمة متتابعة » ، ولكن يجب ملاحظة أن هناك قيود صارمة يجب توفرها لتطبيق هذا التوزيع . حيث يمكن تطبيق هذا التوزيع فقط عندما تكون كل خدمة من الخدمات المتتابعة لها توزيع أسي بنفس المتوسط ولا يسمح بوجود أي زمن تأخير بينها .

مثال : عند إعادة بناء ماكينة ، كان علي عامل الإصلاح القيام بـ (٥) عمليات متتابعة ، فإذا كان وقت الخدمة الذي يؤديه كل عملية له توزيع أسي ، وأن وقت إتمام كل عملية له نفس المتوسط . فيمكن عندئذ تطبيق معادلة إيرلانج (مع وضع k = عدد الخدمات = (٥) . وعموماً يندر توفر هذه القيود عملياً ويعد التوزيع الأسي هو الأكثر إستخداماً لتمثيل توزيع وقت أداء الخدمات . ولو أنه للتطبيق الصحيح لهذا التوزيع ، يجب أن تكون محطة الخدمة قادرة علي أداء الخدمات ذات الوقت القصير جداً بالنسبة لمتوسط زمن الخدمة .

مثال : إستخدام التليفونات (هي أساساً نشأة هذه النظرية) وأكثرها إنطباقاً عليها . حيث يتراوح زمن الخدمة من عدة ثواني (عندما يتردد العميل في إجراء المكالمة ويعيد الساعة) إلي ساعة أو أكثر (مكالمة طويلة) .

النماذج الرياضية لصفوف الإنتظار :

يمكن الآن إجمال الحالات التي يمكن أن نواجهها عند معالجة مشكلة صفوف الإنتظار ، وذلك عن طريق تلخيص الأشكال المختلفة التي يمكن أن يكون عليها كل عنصر من العناصر التي تم مناقشتها علي النحو التالي :

١ - **المجتمع المصدري**
- نهائي
- لا نهائي

٢ - خصائص وصول الوحدات طالبة الخدمة :

النموذج
- يمكن التحكم فيه
- لا يمكن التحكم فيه

حجم الوحدات التي تصل
- فرادي
- في مجموعات

التوزيع الرياضي
- ثابت
- أسّي
- بواسون
- إيرلانج
- أسي زائد
- أغري

درجة الصبر لإنتظار في الصف
- صبور (يقف في الطابور)
- غير صبور
  - يصل ، يلقي نظرة ، ثم ينصرف.
  - يصل ، ينتظر فترة ، ثم ينصرف.

٣ - المعالجة المادية لصفوف الإنتظار :

الطـول
- طول لا نهائي
- طاقة محدودة

عدد الطوابير (المنافذ)
- منفردة
- متعددة

٤ - الإختيار من صف الإنتظار :

- قاعدة أولوية الخدمة .
  - الذي يصل أولاً يتم خدمته أولاً.
  - أقل وقت للمعالجة أولاً .
  - الحاجة أولاً .
  - الحالات الطارئة أولاً .
  - الحاجات المحدودة أولاً .
  - أخري .

٥ - أداء الخدمة :

- الهيكل
  - منفذ واحد
    - مرحلة واحدة .
    - خدمات متتابعة .
  - منافذ متعددة
    - مرحلة واحدة .
    - مراحل متعددة.
  - مزيج
    - الإندماج من قنوات متعددة إلي قناة واحدة
      - مرحلة واحدة
      - مراحل متعددة
    - المسار المتغير

- معدل أداء الخدمة
  - ثابت
  - إيرلانج
  - أسّي زائد
  - أسّي
  - أخري

٦ - المخرجات

- احتمال منخفض للعودة في طلب لخدمة
- العودة إلي مجتمع الموارد

ويتضح من هذا العرض أن هناك عدد لا نهائي من حالات صفوف الإنتظار التي يمكن أن تواجهنا في الحياة العملية . وقد قام المتخصصون بوضع بعض النماذج الخاصة ببعض الحالات والتي يمكن أن يكون لها حلاً رياضياً إعتماداً علي نظريات الإحتمالات . وتجدر الإشارة هنا أن ذلك يعدد عدداً محدوداً من الحالات ولذلك فإن الحالات الأكثر تنوعاً وصعوبة يتم معالجتها بإستخدام المحاكاة Simu-latian إعتماداً علي بعض البرامج الجاهزة أهمها Gpss والذي يعبر عن General Purpose Simulation System. وسوف نتناول فيما يلي خصائص هذه النماذج التي يمكن معالجتها رياضياً والمعادلات التي يمكن أن تستخدم في تحديد بعض المعالم الأساسية لتلك التوزيعات

خصائص بعض نماذج صفوف الإنتظار

رقم النموذج	عدد القنوات	عدد مراحل الخدمة	مجتمع الموارد	التوزيع الرياضي للوصول	الإختبار من الصف	التوزيع الرياضي لأداء الخدمات	الطول المسموح به للصف	أمثلة نمطية للنموذج
١	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أسى	غير محدد	* شباك الاستعلامات بالبنك ، شباك دفع رسوم لصف فردى .
٢	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	ثابت	غيرمحدد	* غسيل آلي للسيارة ،آلة تسلية فى حديقة عامة
٣	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أسى	محدد	* آلد أيس كريم،، خزينة الحساب فى مطعم
٤	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أى توزيع	غير محدد	* توزيع رياضي تجريبي لزمن الرحلات الجوية بين الدول
٥	فردى	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	إبرلانج	غير محدد	* محل حلاقة لرجل واحد
٦	متعدد	فردى	لانهائى	بواسون	FCFS	أسى	غير محدد	* عداد القطع فى توكيل سيارات شباكين دفع رسوم لصفين .
٧	فردى	فردى	نهائى	بواسون	FCFS	أسى	غير محدد	* محطة إصلاح وصيانة آلات فى مصنع

معنى الرموز لمعادلات صفوف الإنتظار «اللانهائية »

الرمز	المعنى
σ	الإنحراف المعيارى
λ	معدل الوصول
μ	معدل أداء الخدمة
$\frac{1}{\mu}$	متوسط زمن أداء الخدمة
$\frac{1}{\lambda}$	متوسط الفاصل الزمنى بين وصول الوحدات
ρ	$= \frac{\lambda}{m}$: معدل إستخدام تسهيلات الخدمة .
n_e	متوسط عدد الوحدات المنتظرة فى الصف
n_s	متوسط عدد الوحدات فى النظام (بما فيها التى تلقى الخدمة) .
t_e	متوسطزمن الإنتظار فى الصف .
t_s	متوسط الزمن الإجمالى فى النظام (. بما فيها زمن أداء الخدمة)
k	الترويع رقم(k) فى عائلة منحنيات إبرلانج
n	عدد الوحدات فى النظام
m	عدد قنوات الخدمة المتماثلة .
q	أقصى طول للصف. (مجموع طول الانتظار وطول الخدمة)
P_n	إحتمال وجود عدد (n) بالضبط وحدة فى النظام
P_w	إحتمال الإنتظار في الصف
P_o	إحتمال عدم الإنتظار

معنى الرموز لمعادلات صفوف الإنتظار «اللانهائيـة »

الرمـز	المعنــــــــى
D	إحتمـال ضرورة إنتظارالوحدة التى تصل فى الصف .
F	معامل الفاعلية ، وهو مقياس لأثرضرورة الإنتظارفى الصف .
H	متوسط عدد الوحدات التى يتم خدمتها .
J	مجتمع الموارد مطروحا منه عدد الوحدات بالنظام (N − n)أى الوحدات التى تحتاج للخدمة
L	متوسط عدد الوحدات فى الصف .
M	عدد قنـوات الخـدمة
n	متوسط عدد الوحدات فى نظام الإنتظار(بما فيهاتلك التيتلقت الخدمة)
N	عدد الوحدات فى مجتمع الموارد
P_n	إحتمال وجود عدد ( )بالضبط من الوحدات فى النظام.
T	متوسط زمن أداء الخدمة .
U	متوسط الزمن بين متطلبات أداء الخدمة للعميل .
W	متوسط زمن الإنتظار فى الصف .
X	معامل أداء الخدمة ،أونسبة الزمن اللازم لاداء الخدمة .

معادلات بعض نماذج صفوف الأنتظار

الرمز	المعادلة
١	$l_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ $w_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ $l_q = \frac{\lambda}{\mu-\lambda}$ $w_s = \frac{1}{\mu-\lambda}$ $P_n = (1-\frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^n \quad ,p = \frac{\lambda}{\mu}$
	$l_q = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu-\lambda)}$ $w_q = \frac{\lambda}{2\mu(\mu-\lambda)}$ $l_s = n_i + \frac{\lambda}{\mu}$ $w_s = t_e + \frac{1}{M}$
	$l_q = (\frac{\lambda}{\mu})\left[\frac{1-Q(\frac{\lambda}{m})^{Q-1}+(Q-1)(\frac{\lambda}{m})^{Q}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})(1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q})}\right]$ $l_s = (\frac{\lambda}{\mu})\left[\frac{1-(1-Q)(\frac{\lambda}{\mu})+Q(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}{(1-\frac{\lambda}{\mu})(1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q})}\right]$ $P_n = \left[\frac{1-\frac{\lambda}{\mu}}{1-(\frac{\lambda}{\mu})^{Q+1}}\right](\frac{\lambda}{\mu})^n$

المعادلة	الرمز
$\bar{n}. = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^2 + \lambda^2\sigma^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})}$ $\quad t_i = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2} + \lambda\sigma^2}{2(1-\frac{\lambda}{\mu})}$ $n_s = ne + \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad t_s = t_s + \frac{1}{\mu}$	١
$n_i = \frac{\kappa+1}{2K}\cdot\frac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$ $\quad t_i = \frac{\kappa+1}{2K}\cdot\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$ $n_s = n_e + \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad t_s = t_e + \frac{1}{\mu}$	
$n_e = \frac{\lambda\mu(\frac{\lambda}{\mu})^m}{(M-1)!(M\mu-\lambda)^2}P_0$ $\quad t_s = \frac{P_0}{\mu M M!(1-\frac{\lambda}{\mu})^2}(\frac{\lambda}{\mu})^m$ $n_s = n_e + \frac{\lambda}{\mu}$ $\quad t_s = t_e + \frac{1}{\mu}$ $P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^{M-1}\frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!} + \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^n}{n!(1-\frac{\lambda}{\mu m})}}$, $\quad P_\omega = (\frac{\lambda}{\mu})^m\frac{P_0}{m!(1-\frac{\lambda}{\mu m})}$	

رقم النموذج	المعـــادلـــة
١	هذا النموذج يعبر عن حالة نهائية لصفوف الإنتظار ، والتي يسهل حلها بإستخدام جداول الصفوف النهائية . وهذه الجداول تستخدم رموزاً مختلفة والتى يوضح الجدول (٣) بياناتها ومعانيها . $X = \frac{T}{T+U}, \quad H = FNX \quad , \quad L = n(1-f)$ $P_n = \frac{N!}{(N+n)!} X \ Pon \quad , \quad J = NF(1-x)$ $W = \frac{L(T+u)}{N-L} = \frac{LT}{H} \quad , \quad F = \frac{T+U}{T+U+W}$ $n = L + H$

وفي كل النماذج السابقة تعد كافة العلاقات التالية صحيحة :

$$L = \lambda w$$

$$L_q = \lambda w_q$$

$$L = L_q +$$

$$W = w_q + \frac{\lambda}{\mu}$$

$$P = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\frac{\lambda}{m\mu}$$

مثـال (M/M/1)

وتفكر وزارة الداخلية في انشاء محطة لوزن سيارات النقل علي الطريق الزراعي وقد أثار ذلك حفيظة العديد من أصحاب شركات النقل والسائقين نظراً لأنهم يتوقعون أن تكون فترة انتظار وتعطل سياراتهم نتيجة لهذا القرار سبباً في أرتفاع تكلفة النقل وعدم قدرتهم علي الاستخدام الأفضل لسياراتهم ولذلك فقد قامت الرزرة بدراسة للموقف تبين منها في المتوسط يمر أمام تلك المحطة حوالي ١٠ سيارات نقل كل ساعة . كذلك فقد أثبتت الدراسات أن متوسط الوقت المستغرق في وزن الشاحنه هو حوالي ٤ دقائق. والمطلوب :

(١) تقدير درجة الانتفاع بالمحطة .

(٢) احتمال أن يكون هناك ثلاثة شاحنات في النظام ككل

(٣) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في الصف حتي يمكن البدء فى وزنهم

(٤) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في النظام ككل .

(٥) متوسط وقت الانتظار في الصف لكل شاحنة .

(٦) متوسط الوقت الذي تقضية الشاحنة في النظام ككل

(٧) وقت العطل المتوقع في المحطة

وذلك بافتراض أن معدل الوصول يخضع للتوزيع البواسرني ووقت الخدمة يخضع للتوزيع الأسي :

الحـــل

λ = 10 Trucks Per hour

S = 4 Minutes Per Truck

μ = 1 Truck Per 4 minutes

15 Trucks Per hour

باستخدام معدلات النموذج الأول :

(١) درجة الانتفاع (درجة استغلال الطاقة بالمحطة)

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = .67 \quad \text{or} \quad 67\%$$

(٢) احتمال أن يكون هناك ثلاثة شاحنات في النظام ككل .

$$P_3 = (1 - \frac{\lambda}{\mu})(\frac{\lambda}{\mu})^3$$

$$= (1 - .67)(.647)^3 = .099, \text{ or } 10\ \%$$

(٣) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في الصف حتي يمكن البدء في وزنهم

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$Lq = \frac{(10)^2}{15(15 - 10)} = 1.33 \text{ Trucks in line}$$

(٤) متوسط عدد الشاحنات المنتظرين في النظام ككل :

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

$$= \frac{10}{15 - 10} = 2 \text{ trucks in the System}$$

(٥) متوسط وقت الانتظار في الصف لكل شاحنة

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{10}{15\,(15 - 10)} = .133 \text{ hours , or 8 minutes}$$

(٦) متوسط الوقت الذي تقضية الشاحنه في النظام ككل

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{15 - 10} = .20 \text{ hours, or 12 minytes}$$

(٧) وقت العطل المتوقع في المحطة

$$1 - P = 1 - .67 = .33, \text{ or } 33\ \%$$

مثـال (M/M/1)

توافرت لدي احدي المكتبات بأحد الكليات ماكينه للتصوير يستخدمها الطلاب لتصوير بعض المقالات والقراءات العلمية . وقد أوضحت الملاحظة أن الطلاب يصلون الي هذه الماكينه بمتوسط قدره ٤٠ طالب في الساعة موزعين حسب التوزيع البواسوني . كذلك فإن وقت التصوير موزعاً توزيعاً أسياً بمترسط قدره دقيقة واحدة . احسب درجة الانتفاع وعدد الطلاب والوقت المتوقع في الصف وفي النظام ككل .

الحـــل :

١ ــ درجـة الأنتفـاع

$$P = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{40}{60} = \frac{2}{3} = 67\%$$

٢ ـ متوسط عدد الطلاب في الصف

$$Lq = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{(40)2}{60\,(60 - 40)} = \frac{4}{3} \text{ Students}$$

٣ ـ متوسط عدد الطلاب في النظام ككل

$$Ls = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \frac{40}{60 - 40} = 2 \text{ Students}$$

٤ ـ متوسط الوقت المنقضي في الصف

$$Wq = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{40}{60\,(60 - 40)} = .033 \text{ hours}$$

$$= 2 \text{ minutes}$$

٥ ـ متوسط الوقت المنقضي في النظام ككل

$$Ws = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{60 - 40} = \frac{1}{20} \text{ houn}$$

$$= 3 \text{ minutes}$$

مثال (M/D/1)

تفكر احدي محطات البنزين فى شراء وحدة غسيل سيارات أتوماتيكية . وقد أوضحت الشركة الموردة لوحدة الغسيل أن وقت غسيل السيارة ثابت ويعادل ٣ دقائق. فإذا افترضنا أن السيارات سوف تصل الي وحدة الغسيل بمعدل سيارة كل ٤ دقائق فالمطلوب حساب نفس المقاييس السابقة التى تم حسابها في المثال السابق مباشرة (عدد الطلاب) .

الحــل :

يتضح من البيانات أن هذه هي الحالة التى يكون فيها معدل الوصول تبعاً للتوزيع الأسى ووقت الخدمة رقماً ثابتاً وعلي ذلك فأن:

(١) درجة الانتفاع بوحدة الغسيل :

$$? = \frac{\lambda}{\mu}$$

وحيث أن السيارات تصل بمتوسط قدرة سيارة كل أربعة دقائق فإن متوسط عدد السيارات الذي يصل في الساعة = ٦٠ ÷ ٤ = ١٥ سيارة / الساعة كذلك فأن : $S = 3$ minutes

ويعني ذلك أن $\mu = 20$ Cars / hour

فإذا كانت $l = 15$

فإن درجة الانتفاع بالوحدة

$$P = \frac{15}{20} = .75, \text{ or } \quad 75\%$$

(٢) متوسط عدد السيارات المنتظرين في الصف حتي تبدأ عملية الغسيل

$$Lq = \frac{\lambda^2}{2\mu(\mu - \lambda)}$$

$$= \frac{(15)^2}{40\,(5)} = 1.125 \text{ Cars in line}$$

(٣) متوسط عدد السيارات المنتظرين في النظام ككل .

$$Ls = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 1.125 \; + .75$$

= 1.875 Cars in The Syste

(٤) متوسط وقت الانتظار في الصف

$$Wq = \frac{Lq}{\lambda} = \frac{1.125}{15}$$

= .075 hours, or 4.5 minutes

(٥) متوسط وقت الانتظار في النظـام ككل

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1.875}{15}$$

= .125 hours, or 705 minutes

مثـال (M/G/1)

قامت كلية الادارة والتكنولوچيا بادخال حاسباً آليا كبيراً يستخدم في التعليم الطلابى . وقد أوضحت الدراسة أن متوسط عدد الطلاب الذين يقدمون اعمالاً يجب انجازها لهذا النظام يبلغ ٢,١ طالباً في الدقيقة موزعة حسب توزيع بواسون . أما متوسط الوقت اللازم لاتمام الأمر علي النظام فيبلغ متوسط ٢٥ ثانية وذلك بانحرافاً معيارياً قدره ٩ ثوان . احسب كل من متوسط عدد الطلاب والوقت في الصف والنظام .

الحـل :

هذه هي حالة الوصول توزيع بواسون ولكن معدل الخدمة لا يتبع توزيع محدد علي أساس أن :

$\lambda = 2.1$ jpbs Per minute

$S = 25$ Seconds

$\mu = 2/4$ jobs per minute

$\sigma = q$ Second, or .15 minutes

وعلي ذلك فإن :

(١) متوسط عدد الطلاب في الصف :

$$L_q = \frac{(\lambda\sigma)^2 + (\frac{\lambda}{\mu})^2}{2(1 - \frac{\lambda}{\mu})}$$

$$= \frac{[(2.1)(.15)]^2 + (\frac{2.1}{2.4})^2}{2(1-.875)}$$

$= 3.46$ jobs in line

(٢) متوسط عدد الطلاب في النظام .

$$L_s = L_q + \frac{\lambda}{\mu} = 3.46 + .875$$

(٣) متوسط الوقت المنقضي في الطابور

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{3.46}{2.1}$$

$= 1.648$ minutes

(٤) متوسط الوقت المنقضي فى النظام

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{4.335}{2.1}$$

$= 2.06$ minutes

مثـال (M/M/s)

تفكر احد المكاتب الخاصة في تقديم خدمة تصوير المذكرات للطلاب . وكان من المقترح أن يكون لديها آلتين في نفس المكان . وقد اتضح أن معدل وصول الطلاب للمكتب موزعاً توزيعاً بمتوسط قدره ٤٠ طالب في الساعة أما عملية الخدمة نفسها فتحتاج في المتوسط إلي وقتاً قدره ٤٠ ثانية علي أي من الآلتين وكان الوقت هذا موزعاً توزيعاً أسياً . احسب درجة الانتفاع وعدد الطلاب والوقت المتوقع في الصف والنظام ككل .

الحـل :

هذه هي حالة وجود أكثر من منفذ (عدد المنافذ = C)

ولكل المنافذ معاً $\lambda = 40$ Per hour

وكل مرة خدمة $S = 40$ Seconds

ويعني ذلك أن $\mu = 60 \div 40$

$= 1.5$ Per minute

$\lambda = 90$ Per hour

وعلي ذلك فأن

(١) درجة الانتفاع من النظام ككل (الآلتين معاً)

$$P = \frac{\lambda}{M\mu} = \frac{40}{2(60)} = \frac{1}{3} = 33\%$$

ويعنى ذلك أن كل آلة تكون مشغولة بمعدل ٣٣٪ في المتوسط

(٢) اعتماد علي الجداول ، متوسط عدد الطلاب في الصف علي أساس أنه

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{2}{3}, \text{ or about } .68$$

Lq = .089 Students

(٣) متوسط عدد الطلاب في النظام ككل

$$L = Lq + \frac{\lambda}{\mu} = -089 + .667$$

$$= .756 \quad \text{Studuts}$$

(٤) متوسط الوقت المنقضي في الصف

$$Wq + \frac{Lq}{\mu} = -089 \div 40$$

$$= .002 \text{ hour,or } .1215 \text{ minutes}$$

(5) متوسط الوقت المنقضي في النظام ككل :

$$Ws = Wq + \frac{1}{\mu} = .002 + \frac{1}{60} + .0187 \text{ hours}$$

$$= 1.12 \text{ minutes}$$

مثـال (M/M/s)

تفكر محلات « بلاش ماركت » في انشاء أحد فروعها الكبيرة في مدينة الاسكندرية . وقد أوضحت الدراسات أن الأسعار المنخفضة للسلع التي يقدمها المحل سوف تجعل متوسط عدد العملاء الذين يصلون من مكتب الدفع (كاشير) سوف يعادل ٤٢ عميل في الساعة

موزعة توزيعاً بواسونيا، وأن متوسط الوقت المستغرق مع العميل للمراجعة والدفع هو ٦ دقائق. احسب متوسط عدد العملاء المتوقع والوقت المستغرق فى كل من الصف والنظام وذلك على أساس أن المحل سوف يجعل هناك خمسة مخارج يتم فيا الدفع والمراجعة .

الحــل :

M = 5

λ = 42 Customecs per hour

S = 6 minutes

μ = 1 Customer Por 6 minutes

= 10 Customers Por hour

r = 42/10 = 4.2

(١) من الجدول حيث r = 4.2 , M= 5

Lq = 3.3269 People in line

(٢) متوسط عدد المنتظرين في الصف

$$Ls = Lq + \frac{1}{\mu} = 7.53 \text{ People in the System}$$

(٣) متوسط الوقت الذي يقضية العميل في الصف

$$Wq = \frac{\lambda q}{\mu} = \frac{3.33}{42} = .069 \text{ hours}$$

$$= 4.76 \text{ minutes}$$

(٤) متوسط الوقت الذي يقضية في النظام .

$$W = \frac{L}{\mu} = \frac{7.53}{42} = .179 \text{ houns}$$

$$= 10.76 \text{ minutes}$$

APPENDIX : QUEUEING TABLES

Appendix : *M/M/s* Queue: Expected number of customers waiting in the system, L_q

Number of servers (channels)

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.020																				
0.040	0.002																			
0.060	0.004																			
0.080	0.007																			
0.100	0.011																			
0.120	0.016																			
0.140	0.023	0.001																		
0.160	0.030	0.001																		
0.180	0.040	0.001																		
0.200	0.050	0.002																		
0.220	0.062	0.003																		
0.240	0.076	0.004																		
0.260	0.091	0.004																		
0.280	0.109	0.006																		
0.300	0.129	0.007																		
0.320	0.151	0.008	0.001																	
0.340	0.175	0.010	0.001																	
0.360	0.202	0.012	0.001																	
0.380	0.233	0.014	0.001																	
0.400	0.267	0.017	0.001																	
0.420	0.304	0.019	0.002																	
0.440	0.346	0.022	0.002																	
0.460	0.392	0.026	0.002																	
0.480	0.443	0.029	0.003																	
0.500	0.500	0.033	0.003																	
0.520	0.563	0.038	0.004																	
0.540	0.634	0.042	0.004																	
0.560	0.713	0.048	0.005																	
0.580	0.801	0.053	0.005	0.001																
0.600	0.900	0.059	0.006	0.001																
0.620	1.012	0.066	0.007	0.001																
0.640	1.138	0.073	0.008	0.001																
0.660	1.281	0.081	0.009	0.001																
0.680	1.445	0.089	0.010	0.001																
0.700	1.633	0.098	0.011	0.001																
0.720	1.851	0.107	0.013	0.001																
0.740	2.106	0.117	0.014	0.002																
0.760	2.407	0.128	0.015	0.002																
0.780	2.765	0.140	0.017	0.002																
0.800	3.200	0.152	0.019	0.002																
0.820	3.736	0.166	0.021	0.003																
0.840	4.410	0.180	0.023	0.003																
0.860	5.283	0.195	0.025	0.003																
0.880	6.453	0.211	0.027	0.004																
0.900	8.100	0.229	0.030	0.004	0.001															
0.920	10.580	0.247	0.033	0.005	0.001															
0.940	14.727	0.267	0.036	0.005	0.001															
0.960	23.040	0.287	0.039	0.006	0.001															
0.980	48.020	0.310	0.042	0.006	0.001															
1.000		0.333	0.045	0.007	0.001															
1.200		0.675	0.094	0.016	0.003															

Appendix · Continued

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
										Number of servers (channels)										
1.400		1.345	0.177	0.032	0.006	0.001														
1.600		2.844	0.313	0.060	0.012	0.002														
1.800		7.674	0.532	0.105	0.023	0.005	0.001													
2.000			0.889	0.174	0.040	0.009	0.002													
2.200			1.491	0.277	0.066	0.016	0.004	0.001												
2.400			2.559	0.431	0.105	0.027	0.007	0.002												
2.600			4.933	0.658	0.161	0.043	0.011	0.003	0.001											
2.800			12.273	1.000	0.241	0.066	0.018	0.005	0.001											
3.000				1.528	0.354	0.099	0.028	0.008	0.002											
3.200				2.386	0.513	0.145	0.043	0.012	0.003	0.001										
3.400				3.906	0.737	0.209	0.063	0.019	0.005	0.901										
3.600				7.090	1.055	0.295	0.091	0.028	0.008	0.002	0.001									
3.800				16.937	1.519	0.412	0.129	0.041	0.013	0.004	0.001									
4.000					2.216	0.570	0.180	0.059	0.019	0.006	0.002									
4.200					3.327	0.784	0.248	0.083	0.027	0.009	0.003	0.001								
4.400					5.268	1.078	0.337	0.114	0.039	0.013	0.004	0.001								
4.600					9.289	1.467	0.453	0.156	0.054	0.018	0.006	0.002	0.001							
4.800					21.641	2.071	0.607	0.209	0.074	0.026	0.009	0.003	0.001							
5.000						2.938	0.810	0.279	0.101	0.036	0.013	0.004	0.001							
5.200						4.301	1.081	0.366	0.135	0.049	0.018	0.006	0.002	0.001						
5.400						6.661	1.444	0.483	0.178	0.066	0.024	0.009	0.003	0.001						
5.600						11.519	1.944	0.631	0.233	0.085	0.033	0.012	0.004	0.001						
5.800						26.373	2.648	0.823	0.303	0.116	0.044	0.017	0.006	0.002	0.001					
6.000							3.633	1.071	0.392	0.152	0.059	0.022	0.008	0.003	0.001					
6.200							5.298	1.397	0.504	0.197	0.078	0.030	0.011	0.004	0.001					
6.400							8.077	1.831	0.645	0.253	0.101	0.040	0.015	0.006	0.002	0.001				
6.600							13.770	2.420	0.825	0.322	0.130	0.052	0.021	0.008	0.003	0.001				
6.800							31.127	3.245	1.054	0.409	0.167	0.068	0.027	0.011	0.004	0.001				
7.000								4.447	1.347	0.517	0.212	0.088	0.036	0.014	0.005	0.002	0.001			
7.200								6.314	1.729	0.652	0.268	0.112	0.046	0.019	0.007	0.003	0.001			
7.400								9.511	2.233	0.820	0.337	0.142	0.060	0.025	0.010	0.004	0.001	0.001		
7.600								16.039	2.912	1.031	0.421	0.179	0.076	0.032	0.013	0.005	0.002	0.001		
7.800								35.898	3.856	1.298	0.535	0.224	0.097	0.041	0.017	0.007	0.003	0.001		
8.000									5.227	1.637	0.653	0.280	0.122	0.052	0.022	0.009	0.004	0.001		
8.200									7.344	2.074	0.811	0.347	0.152	0.066	0.028	0.012	0.005	0.002	0.001	
8.400									10.960	2.647	1.006	0.429	0.189	0.084	0.036	0.015	0.006	0.002	0.001	
8.600									18.323	3.417	1.249	0.529	0.234	0.104	0.046	0.020	0.008	0.003	0.001	
8.800									40.683	4.481	1.553	0.650	0.289	0.130	0.058	0.025	0.011	0.004	0.002	0.001
9.000										6.019	1.937	0.798	0.354	0.161	0.072	0.032	0.014	0.006	0.002	0.001
9.200										8.387	2.430	0.979	0.434	0.198	0.090	0.040	0.018	0.008	0.003	0.001
9.400										12.420	3.073	1.201	0.529	0.242	0.111	0.050	0.022	0.010	0.004	0.002
9.600										20.618	3.932	1.475	0.644	0.295	0.137	0.063	0.028	0.012	0.005	0.002
9.800										45.480	5.116	1.817	0.783	0.359	0.167	0.078	0.035	0.016	0.007	0.003

Appendix . M/M/1 Queue with a Limited Queue Size: Probability that the system is empty

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.02	[illegible]	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.980	0.980
0.04	0.962	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	0.960	[illegible]	0.961	0.960	0.960	0.960
0.06	0.943	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	0.940	[illegible]	0.940	0.940	0.940	0.940
0.08	0.926	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	0.920	[illegible]	0.920	0.920	0.920	0.920
0.10	0.909	0.901	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	[illegible]	0.900	0.900	0.900	0.900
0.12	0.893	0.882	[illegible]	[illegible]	0.880	0.880	[illegible]	[illegible]	0.880	[illegible]	0.880	0.880	0.880	0.880	0.880	[illegible]	0.880	[illegible]	0.880	0.880
0.14	0.877	0.862	[illegible]	0.860	0.860	0.860	[illegible]	0.860	0.860	[illegible]	0.860	0.860	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.860	[illegible]	[illegible]	0.860
0.16	0.862	0.843	0.841	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	0.840	[illegible]	0.840	0.840	0.840	0.840
0.18	0.847	0.825	0.821	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.820	0.821	0.820	[illegible]	0.820	0.820
0.20	0.833	0.806	0.801	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	[illegible]	[illegible]	0.800	0.800	0.800
0.22	0.820	0.782	0.782	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	0.780	[illegible]	0.780	0.780	0.780	0.780
0.24	0.806	0.773	0.763	0.761	0.761	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	0.760	[illegible]	0.760	0.760	0.760	0.760
0.26	0.794	0.753	0.743	0.741	[illegible]	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	0.740	[illegible]	0.740	0.740	0.740	0.740
0.28	0.781	0.736	0.724	0.721	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	0.720	[illegible]	0.720	0.720	0.720	0.720
0.30	0.769	0.719	0.706	0.702	0.701	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	0.700	[illegible]	0.700	0.700	0.700	0.700
0.32	0.758	0.702	0.687	0.682	0.681	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	0.680	[illegible]	0.680	0.680	0.680	0.680
0.34	0.746	0.687	0.669	0.663	0.661	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.660	0.661	0.660	0.660	0.660	0.660
0.36	0.735	0.671	0.651	0.644	0.641	0.641	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.640	0.641	0.640	0.640	0.640	0.640
0.38	0.725	0.656	0.633	0.625	0.622	0.621	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	0.620	[illegible]	0.620	0.620	0.620	0.620
0.40	0.714	0.641	0.616	0.606	0.602	0.601	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600	0.600
0.42	0.704	0.626	0.599	0.588	0.583	0.581	0.581	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	0.580	[illegible]	0.580	0.580	0.580	0.580
0.44	0.694	0.612	0.583	0.569	0.564	0.562	0.561	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.560	0.561	0.560	0.560	0.560	0.560
0.46	0.685	0.598	0.566	0.551	0.545	0.542	0.541	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.540	0.541	0.540	0.540	0.540	0.540
0.48	0.676	0.585	0.549	0.534	0.526	0.523	0.521	0.521	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	0.520	[illegible]	0.520	0.520	0.520	0.520
0.50	0.667	0.571	0.533	0.516	[illegible]	0.504	0.502	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.52	0.658	0.559	0.515	0.499	0.490	0.485	0.483	0.481	0.481	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	0.480	[illegible]	0.480	0.480	0.480	0.480
0.54	0.649	0.546	0.503	0.482	0.472	0.466	0.463	0.462	0.461	0.461	0.460	0.460	0.460	0.460	0.460	[illegible]	0.460	0.460	0.460	0.460
0.56	0.641	0.534	0.488	0.466	0.454	0.448	0.444	0.442	0.441	0.441	0.440	0.440	0.440	0.440	0.440	[illegible]	0.440	0.440	0.440	0.440
0.58	0.633	0.522	0.474	0.450	0.437	0.429	0.425	0.423	0.422	0.421	0.421	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420	0.420
0.60	0.625	0.510	0.460	0.434	0.420	0.412	0.407	0.404	0.402	0.401	0.401	0.401	0.400	0.400	[illegible]	0.400	0.400	0.400	0.400	0.400
0.62	0.617	0.499	0.446	0.418	0.403	0.394	0.388	0.385	0.383	0.382	0.381	0.381	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380	0.380
0.64	0.610	0.488	0.433	0.403	0.387	0.377	0.370	0.366	0.364	0.363	0.362	0.361	0.361	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360	0.360
0.66	0.602	0.477	0.420	0.389	0.371	0.360	0.353	0.348	0.345	0.344	0.342	0.342	0.341	0.341	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340	0.340
0.68	0.595	0.467	0.407	0.374	0.355	0.343	0.335	0.330	0.327	0.325	0.323	0.322	0.321	0.321	0.321	0.320	0.320	0.320	0.320	0.320
0.70	0.588	0.457	0.395	0.361	0.340	0.327	0.318	0.313	0.309	0.306	0.304	0.303	0.302	0.301	0.301	0.301	0.300	0.300	0.300	0.300
0.72	0.581	0.447	0.383	0.347	0.325	0.311	0.302	0.295	0.291	0.288	0.286	0.284	0.283	0.282	0.281	0.281	0.281	0.281	0.280	0.280
0.74	0.575	0.437	0.371	0.334	0.311	0.296	0.286	0.279	0.273	0.270	0.267	0.265	0.264	0.263	0.262	0.262	0.261	0.261	0.261	0.260
0.76	0.568	0.428	0.360	0.322	0.297	0.281	0.270	0.262	0.256	0.252	0.249	0.247	0.245	0.244	0.243	0.242	0.242	0.241	0.241	0.241
0.78	0.562	0.419	0.349	0.309	0.284	0.267	0.255	0.246	0.240	0.235	0.232	0.229	0.227	0.225	0.224	0.223	0.223	0.222	0.222	0.221
[illegible]	0.556	0.410	0.339	0.297	0.271	0.253	0.240	0.231	0.224	0.219	0.215	0.212	0.209	0.207	0.206	0.205	0.204	0.203	0.202	0.202
[illegible]	0.549	0.401	0.329	0.286	0.259	0.240	0.226	0.216	0.209	0.203	0.198	0.195	0.192	0.190	0.188	0.186	0.185	0.184	0.183	0.183
[illegible]	0.543	0.393	0.319	0.275	0.247	0.227	0.213	0.202	0.194	0.188	0.183	0.179	0.175	0.173	0.170	0.169	0.167	0.166	0.165	0.164
[illegible]	0.538	0.385	0.309	0.264	0.235	0.215	0.200	0.189	0.180	0.173	0.167	0.163	0.159	0.156	0.154	0.152	0.150	0.148	0.147	0.146
[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.300	0.254	0.224	0.203	0.187	0.176	0.166	0.159	0.153	0.148	0.144	0.141	0.138	0.135	0.133	0.132	0.130	0.129
0.90	0.526	0.369	0.291	0.244	0.213	0.192	0.176	0.163	0.154	0.146	0.139	0.134	0.130	0.126	0.123	0.120	0.118	0.116	0.114	0.112
0.92	0.521	0.361	0.282	0.235	0.203	0.181	0.164	0.152	0.141	0.133	0.127	0.121	0.116	0.112	0.109	0.106	0.103	0.101	0.099	[illegible]
0.94	0.515	0.354	0.274	0.225	0.193	0.171	0.154	0.141	0.130	0.122	0.114	0.109	0.104	0.099	0.095	0.092	[illegible]	[illegible]	0.085	[illegible]
0.96	0.510	0.347	0.266	0.217	0.184	0.161	0.144	0.130	0.119	0.111	0.103	0.097	0.092	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.077	0.074	0.072	[illegible]
0.98	0.505	0.340	0.258	0.208	0.175	0.152	0.134	[illegible]	0.109	0.100	0.093	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.066	0.063	0.060	[illegible]
1.00	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.111	0.100	0.091	0.083	0.077	[illegible]	0.067	0.063	0.059	0.056	0.053	0.050	0.048
1.20	0.455	0.275	0.186	0.134	0.101	0.077	0.061	0.048	0.039	0.031	0.025	0.021	0.017	0.014	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.006	0.005	[illegible]
1.40	0.417	0.229	0.141	0.091	0.061	0.042	0.029	0.020	0.014	0.010	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	[illegible]	0.001	0.001	[illegible]	[illegible]

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.60	0.385	0.194	0.108	0.063	0.036	0.023	0.014	0.009	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
1.80	0.357	0.166	0.084	0.045	0.024	0.013	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.00	0.333	0.143	0.067	0.032	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.20	0.313	0.124	0.054	0.024	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.40	0.294	0.109	0.044	0.018	0.007	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.60	0.278	0.097	0.036	0.014	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2.80	0.263	0.086	0.030	0.011	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.00	0.250	0.077	0.025	0.008	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.20	0.238	0.069	0.021	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.40	0.227	0.063	0.018	0.005	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.60	0.217	0.057	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3.80	0.208	0.052	0.013	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.00	0.200	0.048	0.012	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.20	0.192	0.044	0.010	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.40	0.185	0.040	0.009	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.60	0.179	0.037	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4.80	0.172	0.035	0.007	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.00	0.167	0.032	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.20	0.161	0.030	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.40	0.156	0.028	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.60	0.152	0.026	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5.80	0.147	0.025	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.00	0.143	0.023	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.20	0.139	0.022	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.40	0.135	0.021	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.60	0.132	0.020	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
6.80	0.128	0.019	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.00	0.125	0.018	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.20	0.122	0.017	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.40	0.119	0.016	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.60	0.116	0.015	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
7.80	0.114	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.00	0.111	0.014	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.20	0.109	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.40	0.106	0.013	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.60	0.104	0.012	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
8.80	0.102	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.00	0.100	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.20	0.098	0.011	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.40	0.096	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.60	0.094	0.010	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
9.80	0.093	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
10.00	0.091	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
20.00	0.048	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
30.00	0.032	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
40.00	0.024	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
50.00	0.020	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
60.00	0.016	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
70.00	0.014	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
80.00	0.012	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
90.00	0.011	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
100.00	0.010	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

Appendix C3: *M/M/1* Queue with a Limited Queue Size: Probability that the system is full

$\frac{\lambda}{\mu}$	Maximum system size, C																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.02	0.020	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.04	0.038	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.06	0.057	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.08	0.074	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.10	0.091	0.009	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.12	0.107	0.013	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.14	0.123	0.017	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.16	0.138	0.022	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.18	0.153	0.027	0.005	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.20	0.167	0.032	0.006	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.22	0.180	0.038	0.008	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.24	0.194	0.044	0.011	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.26	0.206	0.051	0.013	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.28	0.219	0.058	0.016	0.004	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.30	0.231	0.065	0.019	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.32	0.242	0.072	0.023	0.007	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.34	0.254	0.079	0.026	0.009	0.003	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.36	0.265	0.087	0.030	0.011	0.004	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.38	0.275	0.095	0.035	0.013	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.40	0.286	0.103	0.039	0.016	0.006	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.42	0.296	0.110	0.044	0.018	0.007	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.44	0.306	0.119	0.050	0.021	0.009	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.46	0.315	0.127	0.055	0.025	0.011	0.005	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.48	0.32	0.135	0.061	0.028	0.013	0.006	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.50	0.33	0.143	0.067	0.032	0.016	0.008	0.004	0.002	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.52	0.34	0.151	0.073	0.036	0.019	0.010	0.005	0.003	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.54	0.35	0.159	0.079	0.041	0.022	0.012	0.006	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.56	0.359	0.167	0.086	0.046	0.025	0.014	0.008	0.004	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.58	0.36	0.176	0.092	0.051	0.029	0.016	0.009	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.60	0.375	0.184	0.099	0.056	0.033	0.019	0.011	0.007	0.004	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.62	0.383	0.192	0.106	0.062	0.037	0.022	0.014	0.008	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.64	0.390	0.200	0.113	0.068	0.042	0.026	0.016	0.010	0.007	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.66	0.398	0.208	0.121	0.074	0.046	0.030	0.019	0.013	0.008	0.005	0.004	0.002	0.002	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.68	0.405	0.216	0.128	0.080	0.052	0.034	0.023	0.015	0.010	0.007	0.005	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000	0.000
0.70	0.412	0.224	0.135	0.087	0.057	0.038	0.026	0.018	0.012	0.009	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.000	0.000	0.000
0.72	0.419	0.232	0.143	0.093	0.063	0.043	0.030	0.021	0.015	0.011	0.008	0.006	0.004	0.003	0.002	0.001	0.001	0.001	0.001	0.000
0.74	0.425	0.239	0.150	0.100	0.069	0.049	0.035	0.025	0.018	0.013	0.010	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001	0.001
0.76	0.432	0.247	0.158	0.107	0.075	0.054	0.040	0.029	0.022	0.016	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.002	0.002	0.001	0.001
0.78	0.438	0.255	0.166	0.114	0.082	0.060	0.045	0.034	0.026	0.020	0.015	0.012	0.009	0.007	0.005	0.004	0.003	0.003	0.002	0.002
0.80	0.444	0.262	0.173	0.122	0.089	0.066	0.050	0.039	0.030	0.023	0.018	0.015	0.012	0.009	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002
0.82	0.451	0.270	0.181	0.129	0.096	0.073	0.056	0.044	0.035	0.028	0.022	0.018	0.015	0.012	0.010	0.008	0.006	0.005	0.004	0.003
0.84	0.457	0.277	0.189	0.132	0.103	0.080	0.063	0.050	0.040	0.033	0.027	0.022	0.018	0.015	0.012	0.010	0.009	0.007	0.006	0.005
0.86	0.462	0.285	0.197	0.145	0.111	0.087	0.070	0.056	0.046	0.038	0.032	0.027	0.022	0.019	0.016	0.014	0.012	0.010	0.008	0.007
0.88	0.468	0.292	0.204	0.152	0.118	0.094	0.077	0.063	0.053	0.044	0.037	0.032	0.027	0.023	0.020	0.018	0.015	0.013	0.011	0.010
0.90	0.474	0.299	0.212	0.160	0.126	0.102	0.084	0.070	0.059	0.051	0.044	0.038	0.033	0.029	0.025	0.022	0.020	0.017	0.015	0.014
0.92	0.479	0.306	0.220	0.168	0.134	0.110	0.092	0.078	0.067	0.058	0.051	0.044	0.039	0.035	0.031	0.028	0.025	0.022	0.020	0.018
0.94	0.485	0.313	0.227	0.176	0.142	0.118	0.100	0.086	0.075	0.065	0.058	0.052	0.046	0.042	0.038	0.034	0.031	0.028	0.026	0.024
0.96	0.490	0.320	0.235	0.184	0.150	0.126	0.108	0.094	0.083	0.074	0.066	0.060	0.054	0.049	0.045	0.042	0.038	0.036	0.033	0.031
0.98	0.495	0.327	0.242	0.192	0.158	0.134	0.116	0.102	0.091	0.082	0.074	0.068	0.062	0.058	0.053	0.050	0.047	0.044	0.041	0.039
1.00	0.500	0.333	0.250	0.200	0.167	0.143	0.125	0.111	0.100	0.091	0.083	0.077	0.071	0.067	0.063	0.059	0.056	0.053	0.050	0.048
1.20	0.545	0.396	0.322	0.279	0.251	0.231	0.217	0.207	0.199	0.193	0.188	0.184	0.181	0.178	0.176	0.175	0.173	0.172	0.171	0.170
1.40	0.583	0.450	0.386	0.351	0.329	0.316	0.306	0.300	0.296	0.293	0.291	0.289	0.288	0.288	0.287	0.287	0.286	0.286	0.286	0.286

Appendix Continued

	Maximum system size, C																			
$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.60	.615	[illegible]	0.443	0.415	0.399	0.390	[illegible]	0.381	0.378	0.377	0.376	0.376	0.376	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375
1.80	0.643	0.536	0.491	0.469	0.458	0.452	[illegible]	0.447	0.446	0.445	0.445	0.445	0.445	0.445	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444	0.444
2.00	0.667	0.571	0.533	0.516	0.508	0.504	0.502	0.501	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
2.20	0.688	0.602	0.570	0.556	0.550	0.548	0.546	0.546	0.546	0.546	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545	0.545
2.40	0.706	0.629	0.601	0.591	0.586	0.585	0.584	0.584	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583	0.583
2.60	0.722	0.653	0.627	0.621	0.617	0.616	0.616	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615	0.615
2.80	0.737	0.674	0.653	0.647	0.644	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643	0.643
3.00	0.750	0.692	0.675	0.669	0.668	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667
3.20	0.762	0.709	0.694	0.690	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688	0.688
3.40	0.773	0.724	0.711	0.707	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706	0.706
3.60	0.783	0.738	0.727	0.723	0.723	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722	0.722
3.80	0.792	0.751	0.740	0.738	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737	0.737
4.00	0.800	0.762	0.753	0.751	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750	0.750
4.20	0.808	0.772	0.764	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762	0.762
4.40	0.815	0.782	0.775	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773	0.773
4.60	0.821	0.791	0.784	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783	0.783
4.80	0.828	0.799	0.793	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792	0.792
5.00	0.833	0.806	0.801	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800	0.800
5.20	0.839	0.813	0.807	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808	0.808
5.40	0.844	0.820	0.816	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815	0.815
5.60	0.848	0.826	0.822	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821	0.821
5.80	0.853	0.832	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828	0.828
6.00	0.857	0.837	0.834	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833	0.833
6.20	0.861	0.842	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839	0.839
6.40	0.865	0.847	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844	0.844
6.60	0.868	0.851	0.849	0.849	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848	0.848
6.80	0.872	0.856	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853	0.853
7.00	0.875	0.860	0.858	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857	0.857
7.20	0.878	0.863	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861	0.861
7.40	0.881	0.867	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865	0.865
7.60	0.884	0.870	0.869	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868	0.868
7.80	0.886	0.874	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872	0.872
8.00	0.889	0.877	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875	0.875
8.20	0.891	0.880	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878	0.878
8.40	0.894	0.882	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881	0.881
8.60	0.896	0.885	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884	0.884
8.80	0.898	0.888	0.887	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886	0.886
9.00	0.900	0.890	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889	0.889
9.20	0.902	0.892	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891	0.891
9.40	0.904	0.895	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894	0.894
9.60	0.906	0.897	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896	0.896
9.80	0.907	0.899	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898	0.898
10.00	0.909	0.901	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900	0.900
20.00	0.952	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950	0.950
30.00	0.968	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967	0.967
40.00	0.976	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975	0.975
50.00	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980	0.980
60.00	0.984	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983	0.983
70.00	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986	0.986
80.00	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988	0.988
90.00	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989	0.989
100.00	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990	0.990

Appendix : *M/M/1* Queue with a Limited Queue Size: Average number of customers in the system, *L*

Maximum system size, *C*

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0.02	[illegible]	0.04	0.06	0.08	0.11	0.13	0.15	0.18	0.21	0.24	0.27	0.30	0.33	0.36	0.40	0.44	0.47	0.52	0.56	0.60
0.04	[illegible]	0.08	0.12	0.17	0.22	0.28	0.34	0.41	0.48	0.56	0.65	0.74	0.85	0.96	1.09	1.24	1.40	1.57	1.77	2.00
0.06	0.05	0.12	0.19	0.27	0.35	0.45	0.56	0.68	0.83	0.99	1.17	1.38	1.63	1.91	2.23	2.60	3.02	3.50	4.04	4.64
0.08	[illegible]	0.16	0.25	0.36	0.49	0.64	0.81	1.01	1.25	1.52	1.85	2.23	2.67	3.18	3.76	4.41	5.14	5.93	6.77	7.67
0.10	[illegible]	0.20	0.32	0.47	0.64	0.85	1.09	1.33	1.73	2.15	2.63	3.20	3.84	4.57	5.36	6.22	7.13	8.07	9.04	10.02
0.12	[illegible]	0.23	0.39	0.57	0.79	1.06	1.39	1.78	2.25	2.81	3.45	4.18	4.98	5.85	6.77	7.72	8.69	9.68	10.67	11.67
0.14	[illegible]	0.27	0.45	0.68	0.95	1.29	1.70	2.19	2.78	3.46	4.23	5.07	5.97	6.92	7.89	8.87	9.86	10.86	11.86	12.86
0.16	[illegible]	0.31	0.52	0.78	1.12	1.51	2.01	2.60	3.29	4.07	4.93	5.84	6.79	7.77	8.76	9.75	10.75	11.75	12.75	13.75
0.18	[illegible]	0.34	0.58	0.89	1.27	1.74	2.31	2.99	3.76	4.61	5.53	6.48	7.46	8.43	9.45	10.45	11.44	12.44	13.44	14.44
0.20	[illegible]	0.38	0.65	0.99	1.42	1.96	2.60	3.35	4.19	5.09	6.04	7.02	8.01	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00
0.22	[illegible]	0.41	0.71	1.09	1.58	2.17	2.88	3.68	4.57	5.50	6.48	7.46	8.46	9.46	10.45	11.45	12.45	13.45	14.45	15.45
0.24	[illegible]	0.45	0.77	1.19	1.72	2.37	3.13	3.98	4.90	5.86	6.84	7.84	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83
0.26	[illegible]	0.48	0.83	1.29	1.87	2.55	3.37	4.25	5.20	6.17	7.16	8.16	9.15	10.15	11.15	12.15	13.15	44.15	15.15	16.15
0.28	[illegible]	0.51	0.89	1.38	2.00	2.74	3.58	4.50	5.45	6.44	7.43	8.43	9.43	10.43	11.43	12.43	13.43	14.45	15.43	16.43
0.30	[illegible]	0.54	0.95	1.48	2.13	2.91	3.78	4.71	5.68	6.67	7.67	8.67	9.67	10.67	11.67	12.67	13.67	14.67	15.67	16.67
0.32	[illegible]	0.57	1.00	1.56	2.25	3.06	3.96	4.91	5.89	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.87	15.87	16.87
0.34	[illegible]	0.60	1.06	1.65	2.37	3.20	4.12	5.08	6.07	7.06	8.06	9.06	10.06	11.06	12.06	13.06	14.06	15.06	16.06	17.06
0.36	[illegible]	0.63	1.11	1.73	2.48	3.34	4.27	5.24	6.23	7.22	8.22	9.22	10.22	11.22	12.22	13.22	14.22	15.22	16.22	17.22
0.38	[illegible]	0.65	1.16	1.80	2.58	3.46	4.40	5.38	6.37	7.37	8.37	9.37	10.37	11.37	12.37	13.37	14.37	15.37	16.37	17.37
0.40	[illegible]	0.68	1.21	1.87	2.67	3.57	4.52	5.51	6.50	7.50	8.50	9.50	10.50	11.50	12.50	13.50	14.50	15.50	16.50	17.50
0.42	[illegible]	0.70	1.25	1.94	2.76	3.68	4.64	5.62	6.62	7.62	8.62	9.62	10.62	11.62	12.62	13.62	14.62	15.62	16.62	17.62
0.44	[illegible]	0.73	1.30	2.01	2.85	3.77	4.74	5.73	6.73	7.73	8.73	9.73	10.73	11.73	12.73	13.73	14.73	15.73	16.73	17.73
0.46	[illegible]	0.75	1.34	2.07	2.93	3.86	4.84	5.83	6.83	7.83	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83	16.83	17.83
0.48	0.32	0.78	1.38	2.13	3.00	3.95	4.93	5.92	6.92	7.92	8.92	9.93	10.92	11.92	12.92	13.92	14.92	15.92	16.92	17.92
0.50	0.33	0.80	1.42	2.19	3.07	4.02	5.01	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00
0.52	0.34	0.82	1.46	2.24	3.14	4.10	5.08	6.08	7.08	8.08	9.08	10.08	11.08	12.08	13.08	14.08	15.08	16.08	17.08	18.08
0.54	0.35	0.84	1.50	2.30	3.20	4.16	5.15	6.15	7.15	8.15	9.15	10.15	11.15	12.15	13.15	14.15	15.15	16.15	17.15	18.15
0.56	0.36	0.86	1.53	2.35	3.26	4.23	5.22	6.22	7.21	8.21	9.21	10.21	11.21	12.21	13.21	14.21	15.21	16.21	17.21	18.21
0.58	0.37	0.88	1.57	2.39	3.32	4.29	5.28	6.28	7.28	8.28	9.28	10.28	11.28	12.28	13.28	14.28	15.28	16.28	17.28	[illegible]
0.60	0.37	0.90	1.60	2.44	3.37	4.34	5.34	6.33	7.33	8.33	9.33	10.33	11.33	12.33	13.33	14.33	15.33	16.33	17.33	[illegible]
0.62	0.38	0.92	1.63	2.48	3.42	4.39	5.39	6.39	7.39	8.39	9.39	10.39	11.39	12.39	13.39	14.39	15.39	16.39	17.39	18.39
0.64	0.39	0.94	1.66	2.52	3.46	4.44	5.44	6.44	7.44	8.44	9.44	10.44	11.44	12.44	13.44	14.44	15.44	16.44	17.44	18.44
0.66	0.40	0.96	1.69	2.56	3.51	4.49	5.49	6.49	7.48	8.48	9.48	10.48	11.48	12.48	13.48	14.48	15.48	16.48	17.48	18.48
0.68	0.40	0.98	1.72	2.60	3.55	4.53	5.53	6.53	7.53	8.53	9.53	10.53	11.53	12.53	13.53	14.53	15.53	16.53	17.53	18.53
0.70	0.41	0.99	1.75	2.63	3.59	4.58	5.57	6.57	7.57	8.57	9.57	10.57	11.57	12.57	13.57	14.57	15.57	16.57	17.57	18.57
0.72	0.42	1.01	1.77	2.67	3.63	4.61	5.61	6.61	7.61	8.61	9.61	10.61	11.61	12.61	13.61	14.61	15.61	16.61	17.61	18.61
0.74	0.43	1.03	1.80	2.70	3.66	4.65	5.65	6.65	7.65	8.65	9.65	10.65	11.65	12.65	13.65	14.65	15.65	16.65	17.65	18.65
0.76	0.43	1.04	1.82	2.73	3.70	4.69	5.68	6.68	7.68	8.68	9.68	10.68	11.68	12.68	13.68	14.68	15.68	16.68	17.68	18.68
0.78	0.44	1.06	1.85	2.76	3.73	4.72	5.72	6.72	7.72	8.72	9.72	10.72	11.72	12.72	13.72	14.72	15.72	16.72	17.72	18.72
0.80	0.44	1.07	1.87	2.79	3.76	4.25	5.75	6.75	7.75	8.75	9.75	10.75	11.75	12.75	13.75	14.75	15.75	16.75	17.75	18.75
0.82	0.45	1.09	1.89	2.81	3.79	4.78	5.78	6.78	7.78	8.78	9.78	10.78	11.78	12.78	13.78	14.78	15.78	16.78	17.78	18.78
0.84	0.46	1.10	1.91	2.84	3.82	4.81	5.81	6.81	7.81	8.81	9.81	10.81	11.81	12.81	13.81	14.81	15.81	16.81	17.81	18.81
0.86	0.46	1.11	1.94	2.87	3.84	4.84	5.84	6.84	7.84	8.84	9.84	10.84	11.84	12.84	13.84	14.84	15.84	16.84	17.84	18.84
0.88	0.47	1.13	1.96	2.89	3.87	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86
0.90	0.47	1.14	1.97	2.91	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89
0.92	0.48	1.15	1.99	2.93	3.92	4.91	5.91	6.91	7.91	8.91	9.91	10.91	11.91	12.91	13.91	14.91	15.91	16.91	17.91	18.91
0.94	0.48	1.17	2.01	2.96	3.94	4.94	5.94	6.94	7.94	8.94	9.94	10.94	11.94	12.94	13.94	14.94	15.94	16.94	17.94	18.94
0.96	0.49	1.18	2.03	2.98	3.96	4.96	5.96	6.96	7.96	8.96	9.96	10.96	11.96	12.96	13.96	14.96	15.96	16.96	17.96	18.96
0.98	0.49	1.19	2.05	3.00	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98
1.00	0.50	1.20	2.06	3.02	4.00	5.00	6.00	7.00	8.00	9.00	10.00	11.00	12.00	13.00	14.00	15.00	16.00	17.00	18.00	19.00
1.20	0.55	1.30	2.20	3.17	4.17	5.17	6.17	7.17	8.17	9.17	10.17	11.17	12.17	13.17	14.17	15.17	16.17	17.17	18.17	19.17
1.40	0.58	1.38	2.31	3.29	4.29	5.29	6.29	7.29	8.29	9.29	10.29	11.29	12.29	13.29	14.29	15.29	16.29	17.29	18.29	19.29

Appendix Continued

Maximum system size, C

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1.60	0.62	1.44	2.39	3.38	4.38	5.38	6.38	7.38	8.38	9.38	10.38	11.38	12.38	13.38	14.38	15.38	16.38	17.38	18.38	19.38
1.80	0.64	1.49	2.45	3.45	4.44	5.44	6.44	7.44	8.44	9.44	10.44	11.44	12.44	13.44	14.44	15.44	16.44	17.44	18.44	19.44
2.00	0.67	1.54	2.51	3.50	4.50	5.50	6.50	7.50	8.50	9.50	10.50	11.50	12.50	13.50	14.50	15.50	16.50	17.50	18.50	19.50
2.20	0.69	1.58	2.55	3.55	4.55	5.55	6.55	7.55	8.55	9.55	10.55	11.55	12.55	13.55	14.55	15.55	16.55	17.55	18.55	19.55
2.40	0.71	1.61	2.59	3.58	4.58	5.58	6.58	7.58	8.58	9.58	10.58	11.58	12.58	13.58	14.58	15.58	16.58	17.58	18.58	19.58
2.60	0.72	1.63	2.62	3.62	4.62	5.62	6.62	7.62	8.62	9.62	10.62	11.62	12.62	13.62	14.62	15.62	16.62	17.62	18.62	19.62
2.80	0.74	1.66	2.64	3.64	4.64	5.64	6.64	7.64	8.64	9.64	10.64	11.64	12.64	13.64	14.64	15.64	16.64	17.64	18.64	19.64
3.00	0.75	1.68	2.67	3.67	4.67	5.67	6.67	7.67	8.67	9.67	10.67	11.67	12.67	13.67	14.67	15.67	16.67	17.67	18.67	19.67
3.20	0.76	1.70	2.69	3.69	4.69	5.69	6.69	7.69	8.69	9.69	10.69	11.69	12.69	13.69	14.69	15.69	16.69	17.69	18.69	19.69
3.40	0.77	1.72	2.71	3.71	4.71	5.71	6.71	7.71	8.71	9.71	10.71	11.71	12.71	13.71	14.71	15.71	16.71	17.71	18.71	19.71
3.60	0.78	1.73	2.72	3.72	4.72	5.72	6.72	7.72	8.72	9.72	10.72	11.72	12.72	13.72	14.72	15.72	16.72	17.72	18.72	19.72
3.80	0.79	1.74	2.74	3.74	4.74	5.74	6.74	7.74	8.74	9.74	10.74	11.74	12.74	13.74	14.74	15.74	16.74	17.74	18.74	19.74
4.00	0.80	1.76	2.75	3.75	4.75	5.75	6.75	7.75	8.75	9.75	10.75	11.75	12.75	13.75	14.75	15.75	16.75	17.75	18.75	19.75
4.20	0.81	1.77	2.76	3.76	4.76	5.76	6.76	7.76	8.76	9.76	10.76	11.76	12.76	13.76	14.76	15.76	16.76	17.76	18.76	19.76
4.40	0.81	1.78	2.77	3.77	4.77	5.77	6.77	7.77	8.77	9.77	10.77	11.77	12.77	13.77	14.77	15.77	16.77	17.77	18.77	19.77
4.60	0.82	1.79	2.78	3.78	4.78	5.78	6.78	7.78	8.78	9.78	10.78	11.78	12.78	13.78	14.78	15.78	16.78	17.78	18.78	19.78
4.80	0.83	1.80	2.79	3.79	4.79	5.79	6.79	7.79	8.79	9.79	10.79	11.79	12.79	13.79	14.79	15.79	16.79	17.79	18.79	19.79
5.00	0.83	1.80	2.80	3.80	4.80	5.80	6.80	7.80	8.80	9.80	10.80	11.80	12.80	13.80	14.80	15.80	16.80	17.80	18.80	19.80
5.20	0.84	1.81	2.81	3.81	4.81	5.81	6.81	7.81	8.81	9.81	10.81	11.81	12.81	13.81	14.81	15.81	16.81	17.81	18.81	19.81
5.40	0.84	1.82	2.81	3.81	4.81	5.81	6.81	7.81	8.81	9.81	10.81	11.81	12.81	13.81	14.81	15.81	16.81	17.81	18.81	19.81
5.60	0.85	1.82	2.82	3.82	4.82	5.82	6.82	7.82	8.82	9.82	10.82	11.82	12.82	13.82	14.82	15.82	16.82	17.82	18.82	19.82
5.80	0.85	1.83	2.83	3.83	4.83	5.83	6.83	7.83	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83	16.83	17.83	18.83	19.83
6.00	0.86	1.84	2.83	3.83	4.83	5.83	6.83	7.83	8.83	9.83	10.83	11.83	12.83	13.83	14.83	15.83	16.83	17.83	18.83	19.83
6.20	0.86	1.84	2.84	3.84	4.84	5.84	6.84	7.84	8.84	9.84	10.84	11.84	12.84	13.84	14.84	15.84	16.84	17.84	18.84	19.84
6.40	0.86	1.85	2.84	3.84	4.84	5.84	6.84	7.84	8.84	9.84	10.84	11.84	12.84	13.84	14.84	15.84	16.84	17.84	18.84	19.84
6.60	0.87	1.85	2.85	3.85	4.85	5.85	6.85	7.85	8.85	9.85	10.85	11.85	12.85	13.85	14.85	15.85	16.85	17.85	18.85	19.85
6.80	0.87	1.85	2.85	3.85	4.85	5.85	6.85	7.85	8.85	9.85	10.85	11.85	12.85	13.85	14.85	15.85	16.85	17.85	18.85	19.85
7.00	0.88	1.86	2.86	3.86	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86	19.86
7.20	0.88	1.86	2.86	3.86	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86	19.86
7.40	0.88	1.87	2.86	3.86	4.86	5.86	6.86	7.86	8.86	9.86	10.86	11.86	12.86	13.86	14.86	15.86	16.86	17.86	18.86	19.86
7.60	0.88	1.87	2.87	3.87	4.87	5.87	6.87	7.87	8.87	9.87	10.87	11.87	12.87	13.87	14.87	15.87	16.87	17.87	18.87	19.87
7.80	0.89	1.87	2.87	3.87	4.87	5.87	6.87	7.87	8.87	9.87	10.87	11.87	12.87	13.87	14.87	15.87	16.87	17.87	18.87	19.87
8.00	0.89	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.20	0.89	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.40	0.89	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.60	0.90	1.88	2.88	3.88	4.88	5.88	6.88	7.88	8.88	9.88	10.88	11.88	12.88	13.88	14.88	15.88	16.88	17.88	18.88	19.88
8.80	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.00	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.20	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.40	0.90	1.89	2.89	3.89	4.89	5.89	6.89	7.89	8.89	9.89	10.89	11.89	12.89	13.89	14.89	15.89	16.89	17.89	18.89	19.89
9.60	0.91	1.90	2.90	3.90	4.90	5.90	6.90	7.90	8.90	9.90	10.90	11.90	12.90	13.90	14.90	15.90	16.90	17.90	18.90	19.90
9.80	0.91	1.90	2.90	3.90	4.90	5.90	6.90	7.90	8.90	9.90	10.90	11.90	12.90	13.90	14.90	15.90	16.90	17.90	18.90	19.90
10.00	0.91	1.90	2.90	3.90	4.90	5.90	6.90	7.90	8.90	9.90	10.90	11.90	12.90	13.90	14.90	15.90	16.90	17.90	18.90	19.90
20.00	0.95	1.95	2.95	3.95	4.95	5.95	6.95	7.95	8.95	9.95	10.95	11.95	12.95	13.95	14.95	15.95	16.95	17.95	18.95	19.95
30.00	0.97	1.97	2.97	3.97	4.97	5.97	6.97	7.97	8.97	9.97	10.97	11.97	12.97	13.97	14.97	15.97	16.97	17.97	18.97	19.97
40.00	0.98	1.98	2.98	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98	19.98
50.00	0.98	1.98	2.98	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98	19.98
60.00	0.98	1.98	2.98	3.98	4.98	5.98	6.98	7.98	8.98	9.98	10.98	11.98	12.98	13.98	14.98	15.98	16.98	17.98	18.98	19.98
70.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99
80.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99
90.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99
100.00	0.99	1.99	2.99	3.99	4.99	5.99	6.99	7.99	8.99	9.99	10.99	11.99	12.99	13.99	14.99	15.99	16.99	17.99	18.99	19.99

Appendix *M/M/1* Queue with a finite population: Expected number of customers waiting in the system, *L*.

Population Size, *N*

$\frac{\lambda}{\mu}$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0.02	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020	0.020
0.04	0.038	0.041	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042	0.042
0.06	0.057	0.063	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064	0.064
0.08	0.074	0.085	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087	0.087
0.10	0.091	0.108	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111	0.111
0.12	0.107	0.131	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136	0.136
0.14	0.123	0.155	0.161	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163	0.163
0.16	0.138	0.178	0.185	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190	0.190
0.18	0.153	0.202	0.215	0.219	0.219	0.219	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220	0.220
0.20	0.167	0.226	0.244	0.248	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250	0.250
0.22	0.180	0.250	0.273	0.279	0.281	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282	0.282
0.24	0.194	0.274	0.302	0.312	0.315	0.315	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316	0.316
0.26	0.206	0.298	0.333	0.345	0.349	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351	0.351
0.28	0.219	0.322	0.364	0.380	0.386	0.388	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389	0.389
0.30	0.231	0.345	0.396	0.416	0.424	0.427	0.428	0.428	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429	0.429
0.32	0.242	0.369	0.428	0.454	0.464	0.468	0.470	0.470	0.470	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471	0.471
0.34	0.254	0.392	0.461	0.492	0.506	0.511	0.514	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515	0.515
0.36	0.265	0.416	0.494	0.532	0.549	0.557	0.560	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562	0.562
0.38	0.275	0.439	0.528	0.573	0.595	0.606	0.610	0.611	0.612	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613	0.613
0.40	0.286	0.462	0.562	0.615	0.642	0.655	0.661	0.664	0.666	0.666	0.666	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667
0.42	0.296	0.484	0.596	0.658	0.691	0.708	0.716	0.720	0.722	0.723	0.724	0.724	0.724	0.724	0.724	0.724	0.724
0.44	0.306	0.506	0.630	0.702	0.742	0.763	0.774	0.780	0.783	0.784	0.785	0.785	0.786	0.786	0.786	0.786	0.786
0.46	0.315	0.528	0.664	0.747	0.794	0.821	0.836	0.844	0.848	0.850	0.851	0.851	0.852	0.852	0.852	0.852	0.852
0.48	0.324	0.550	0.699	0.792	0.849	0.882	0.900	0.911	0.917	0.920	0.921	0.922	0.923	0.923	0.923	0.923	0.923
0.50	0.333	0.571	0.733	0.839	0.905	0.945	0.969	0.982	0.990	0.995	0.997	0.998	0.999	1.000	1.000	1.000	1.000
0.52	0.342	0.592	0.768	0.886	0.962	1.011	1.040	1.058	1.069	1.075	1.079	1.081	1.082	1.083	1.083	1.083	1.083
0.54	0.351	0.613	0.802	0.933	1.021	1.077	1.116	1.139	1.153	1.161	1.167	1.170	1.171	1.172	1.173	1.173	1.174
0.56	0.359	0.634	0.836	0.981	1.082	1.150	1.195	1.224	1.242	1.254	1.261	1.266	1.269	1.270	1.271	1.272	1.272
0.58	0.367	0.654	0.871	1.030	1.144	1.223	1.277	1.314	1.338	1.353	1.364	1.370	1.374	1.377	1.378	1.379	1.380
0.60	0.375	0.673	0.904	1.078	1.206	1.298	1.363	1.408	1.439	1.460	1.474	1.483	1.487	1.493	1.495	1.497	1.498
0.62	0.383	0.693	0.938	1.127	1.270	1.376	1.453	1.508	1.547	1.574	1.593	1.606	1.614	1.620	1.624	1.627	1.628
0.64	0.390	0.712	0.971	1.176	1.335	1.456	1.546	1.613	1.661	1.696	1.721	1.738	1.751	1.759	1.765	1.769	1.772
0.66	0.398	0.731	1.004	1.225	1.401	1.537	1.642	1.722	1.782	1.826	1.859	1.882	1.899	1.912	1.920	1.927	1.931
0.68	0.405	0.749	1.037	1.274	1.467	1.620	1.742	1.836	1.909	1.966	2.007	2.038	2.061	2.079	2.091	2.101	2.108
0.70	0.412	0.767	1.069	1.323	1.533	1.705	1.844	1.955	2.043	2.111	2.165	2.206	2.238	2.262	2.280	2.294	2.304
0.72	0.419	0.785	1.101	1.372	1.600	1.791	1.947	2.078	2.182	2.267	2.334	2.387	2.429	2.462	2.488	2.507	2.523
0.74	0.425	0.802	1.133	1.420	1.667	1.878	2.056	2.205	2.328	2.430	2.514	2.581	2.636	2.680	2.716	2.744	2.766
0.76	0.432	0.819	1.164	1.468	1.734	1.966	2.165	2.335	2.480	2.602	2.704	2.789	2.860	2.918	2.966	3.005	3.037
0.78	0.438	0.836	1.195	1.516	1.802	2.054	2.275	2.469	2.636	2.781	2.904	3.010	3.100	3.176	3.239	3.293	3.338
0.80	0.444	0.852	1.225	1.563	1.868	2.142	2.387	2.605	2.797	2.966	3.115	3.244	3.356	3.453	3.537	3.608	3.670
0.82	0.451	0.869	1.255	1.610	1.935	2.231	2.500	2.743	2.962	3.158	3.334	3.490	3.628	3.750	3.858	3.952	4.035
0.84	0.457	0.884	1.284	1.656	2.001	2.320	2.613	2.883	3.130	3.356	3.561	3.746	3.915	4.066	4.203	4.325	4.434
0.86	0.462	0.900	1.313	1.701	2.066	2.408	2.727	3.024	3.301	3.557	3.794	4.013	4.215	4.400	4.569	4.725	4.866
0.88	0.468	0.915	1.341	1.746	2.131	2.495	2.840	3.166	3.473	3.762	4.034	4.288	4.526	4.749	4.957	5.150	5.330
0.90	0.474	0.930	1.369	1.790	2.195	2.582	2.953	3.308	3.647	3.969	4.277	4.569	4.847	5.111	5.361	5.597	5.821
0.92	0.479	0.944	1.396	1.834	2.258	2.668	3.066	3.449	3.820	4.178	4.523	4.855	5.175	5.483	5.779	6.063	6.336
0.94	0.485	0.959	1.423	1.876	2.320	2.753	3.176	3.590	3.993	4.386	4.769	5.143	5.507	5.861	6.206	6.542	6.868
0.96	0.490	0.973	1.449	1.918	2.381	2.837	3.286	3.728	4.164	4.593	5.015	5.431	5.840	6.243	6.639	7.028	7.411
0.98	0.495	0.987	1.475	1.960	2.441	2.919	3.394	3.865	4.333	4.798	5.259	5.717	6.172	6.623	7.071	7.516	7.957
1.00	0.500	1.000	1.500	2.000	2.500	3.000	3.500	4.000	4.500	10.000	11.000	12.000	13.000	14.000	15.000	16.000	17.000
1.20	0.545	1.121	1.726	2.359	3.021	3.710	4.424	5.164	5.926	6.711	7.516	8.340	9.183	10.041	10.915	11.802	12.79[illegible]
1.40	0.585	1.220	1.908	2.642	3.419	4.234	5.081	5.958	6.858	7.779	8.715	9.665	10.627	11.597	12.574	13.556	14.543

مراجع الكتاب

أولا المراجع العربية :

١ ـ الدكتور حسين عطا غنيم ، **مقدمة في بحوث العمليات** ، الطبعة الثانية ، القاهرة : دار الفكر العربي ، ١٩٨٤ .

٢ ـ الدكتور علي السلمي ، **بحوث العمليات واتخاذ القرارات الإدارية** ، القاهرة : دار المعارف ، ١٩٧. .

٣ ـ الدكتورة سونيا البكري ، **استخدام الأساليب الكمية في اتخاذ القرارات الانتاجية** ، الاسكندرية : المكتب العربي الحديث ، ١٩٨٤ .

٤ ـ الدكتور محمد صالح الحناوي ، **إدارة الإنتاج مدخل كمي** ، الاسكندرية : المكتب العربي الحديث ، ١٩٨٣ .

٥ ـ الدكتور محمد صالح الحناوي ، **بحوث العمليات في مجال الانتاج** ، الاسكندرية : مؤسسة شباب الجامعة ، ١٩٧٩ .

ثانيا : المراجع الأجنبية :

(1) Anderson, D. R.; D. J. Sweeney, and T.A. William, An Introduction to Management Science, Quantitative Approach to Decision Making, 2nd edition, N. Y. : West Publishing Company, 1979 .

(2) Bierman, H, C. Bonini, and W. Hausman , Quantitative Analysis for Business Decisions, Sixth edition Homewood, Illinois: Richard D. Irwin, Inc., 1981 .

(3) Buffa Elwood S., Modern Production / Operations Management - 7th ed. New York, N. Y., : John Wiely & Sons, 1984 .

(4) Gass, S. I. Linear Programming Methods and Applications New York : McGraw-Hill Book Co., 1969 .

(5) Harvey, C. Operations Research, An Introduction to Linear Optimization and Decision Analysis. New York : North Holland . 1979 .

(6) Lee, Sang M., Introduction to Management Science, New York, The Dryden Press, 1983 .

(7) Lee Sang M., Moore, L.J. and Taylor, B. W. Management Science, Dubuque, Iowa: Wm. C. Brown Company 1981 .

(8) Levin, I. Richard: C.A. Kirkpatrick, D.S. Rubbin, Quanitation Approaches to Management, Fifth edition, N. Y., N. Y. : McGraw - Hill Book Company, 1982 .

(9) Loomba, N.P., and Turban, E. Applied Programming for Management New York : Holt, Rinehart and Winston, Inc., 1974 .

(10) Thierauf, R. J. and Grosse, R. Decision MakingTrough Operations Research. New York, N.Y., John Wiley & Sons, INC .

(11) Turban, E., and Meredith Jack R. Fundamentals of Management Science, Plano, Teras : Business Publications INC. 1981 .

(12) Wagner, H. M. Operation Research with Applications to Managerial Decisions. 2d ed. Englewood Cliffs. N. J. :